

Bloque 3

Geometría

Todo el bloque descansa sobre tres productos: escalar, vectorial y mixto. Con ellos salen los ángulos, las distancias, las áreas y los volúmenes, y la clave es saber cuál toca en cada caso.

Contenido

3.1 Vectores en el espacio

Operaciones con vectores, dependencia lineal y bases, producto escalar, vectorial y mixto.

3.2 Rectas y planos

Ecuaciones de la recta y del plano, y posiciones relativas de rectas y planos, incluidas las de dos y tres planos.

3.3 Ángulos, distancias y áreas

Ángulos, distancias entre puntos, rectas y planos, áreas y volúmenes, proyecciones, simétricos y perpendicular común.

Apuntes de preparación para la PAU · 2.º de Bachillerato

Ejemplar de muestra gratuito, igual para todos. Prohibida su venta o redistribución sin permiso escrito del titular.

© 2026 PAUmode. Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial, la distribución, la comunicación pública y la transformación de esta obra sin autorización escrita del titular. El incumplimiento podrá dar lugar a las acciones civiles y penales previstas en la legislación sobre propiedad intelectual.

3.1 Vectores en el espacio

Apuntes desarrollados para la PAU. Teoría explicada paso a paso, con ejercicios resueltos al estilo del examen. El bloque de Geometría se divide en tres partes: **3.1 Vectores** · 3.2 Rectas y planos · 3.3 Ángulos, distancias y áreas.

3.1.1 · Vectores en el espacio

Un **vector** en el espacio es un segmento orientado que representa una dirección, un sentido y un módulo (longitud). Se expresa con tres coordenadas: $v = (v_1, v_2, v_3)$. El vector que va del punto A al punto B se calcula restando coordenadas: $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$.

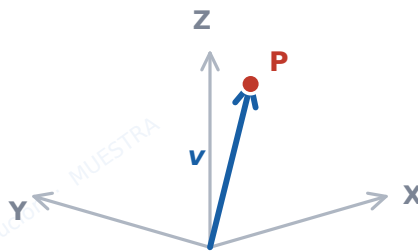


Figura 1 - El vector v va del origen de coordenadas al punto P .

El **módulo** (longitud) de un vector se calcula con el teorema de Pitágoras en el espacio:

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Dos operaciones con puntos que conviene tener a mano: el **punto medio** del segmento AB, que es la media de las coordenadas, y la comprobación de que tres puntos A, B y C están **alineados**, que ocurre cuando AB y AC son proporcionales.

$$M = \left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}, \frac{a_3+b_3}{2} \right)$$

✓ **Truco.** Para hallar el vector entre dos puntos, siempre es "el de llegada menos el de salida": $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. Un error típico es restarlos al revés, lo que da el vector opuesto.

3.1.2 · Dependencia lineal y bases

Un vector w es **combinación lineal** de u y v si se puede escribir como $w = a \cdot u + b \cdot v$, con a y b números reales. Un conjunto de vectores es **linealmente dependiente** si uno de ellos es combinación lineal de los demás, e **independiente** si no lo es ninguno.

- **Dos vectores** son dependientes si y solo si sus coordenadas son proporcionales (tienen la misma dirección).
- **Tres vectores** del espacio son dependientes si y solo si el determinante formado con sus coordenadas vale 0. Geométricamente, están en un mismo plano.
- **Cuatro o más vectores** del espacio son siempre dependientes.

Tres vectores independientes forman una **base** del espacio: cualquier otro vector se escribe, de una sola manera, como combinación lineal de ellos. La base más usada es la canónica, $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 1)$.

u, v, w forman base $\Leftrightarrow \det(u, v, w) \neq 0$

✓ **Truco.** Para escribir un vector como combinación lineal de otros se plantea $w = a \cdot u + b \cdot v$ coordenada a coordenada: salen tres ecuaciones con dos incógnitas. Si el sistema tiene solución, w es combinación lineal; si es incompatible, no lo es.

3.1.3 · Producto escalar

El **producto escalar** de dos vectores da un número (un escalar), y es la herramienta clave para calcular **ángulos** y comprobar **perpendicularidad**. Se calcula multiplicando coordenada a coordenada y sumando:

$$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

También se relaciona con el ángulo que forman los vectores: $u \cdot v = |u| \cdot |v| \cdot \cos(\alpha)$. De aquí se despeja el ángulo. Además, $v \cdot v = |v|^2$, que es otra forma de ver el módulo. Y lo más útil para el examen:

$$u \perp v \Leftrightarrow u \cdot v = 0$$

✓ **Truco.** Si el producto escalar de dos vectores da cero, son perpendiculares. Esto se usa constantemente: para encontrar vectores perpendiculares, para comprobar que una recta es paralela a un plano (su director es perpendicular al normal), etc.

3.1.4 · Producto vectorial

El **producto vectorial** $u \times v$ da como resultado **otro vector**, perpendicular a los dos originales. Se calcula como un determinante simbólico, desarrollado por la primera fila:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Su gran utilidad: el **módulo** del producto vectorial es el **área del paralelogramo** que forman los dos vectores (y la mitad, el área del triángulo). Y si $u \times v = (0, 0, 0)$, los dos vectores son paralelos.

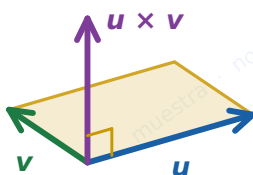


Figura 2 - $u \times v$ es perpendicular a u y a v , y su módulo es el área del paralelogramo amarillo.

$$\text{Área paralelogramo} = |u \times v| \quad \text{Área triángulo} = \frac{1}{2} \cdot |u \times v|$$

✓ **Truco.** El producto vectorial NO es conmutativo: $u \times v = -(v \times u)$. Cambiar el orden cambia el sentido del vector resultante, aunque el módulo (y por tanto el área) es el mismo.

✗ **Error típico.** Olvidar el signo menos de la segunda coordenada. Al desarrollar el determinante por la primera fila, el término de j va restando: sale $-(u_1 v_3 - u_3 v_1)$, no $+(u_1 v_3 - u_3 v_1)$.

3.1.5 · Producto mixto

El **producto mixto** de tres vectores es $[u, v, w] = u \cdot (v \times w)$. Da un número, y se calcula como el determinante de las tres filas de coordenadas:

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Su utilidad: el **valor absoluto** del producto mixto es el **volumen del paralelepípedo** formado por los tres vectores. El volumen del tetraedro es un sexto de ese valor. Como es un determinante, si se intercambian dos de los vectores cambia de signo, pero no de valor absoluto.

$$V_{\text{paralelepípedo}} = |[u, v, w]| \quad V_{\text{tetraedro}} = (1/6) \cdot |[u, v, w]|$$

✓ **Truco.** Si el producto mixto de tres vectores es 0, los tres son coplanarios (están en el mismo plano, es decir, son linealmente dependientes). Esto se usa para comprobar si cuatro puntos están en un mismo plano y si dos rectas se cortan.

Ejercicios

Diez ejercicios de vectores al estilo de la PAU, resueltos. En **rojo** va la explicación de qué se hace y por qué; en negro, la resolución con los cálculos.

1. Dados los puntos A(1, 2, 3) y B(4, 0, 1), halla el vector AB y su módulo.

El vector entre dos puntos es el de llegada menos el de salida: $AB = B - A$. El módulo se calcula con la raíz de la suma de cuadrados.

$$AB = (4-1, 0-2, 1-3) = (3, -2, -2)$$

$$|AB| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

Solución: $AB = (3, -2, -2)$, con módulo $\sqrt{17}$.

2. Calcula el producto escalar de $u = (2, -1, 3)$ y $v = (1, 4, 0)$, y di si son perpendiculares.

Se multiplica coordenada a coordenada y se suma. Si el resultado es 0, son perpendiculares.

$$u \cdot v = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 2 - 4 + 0 = -2$$

Como el resultado es -2 (distinto de 0), NO son perpendiculares.

Solución: $u \cdot v = -2$; no son perpendiculares.

3. Halla el ángulo que forman los vectores $u = (1, 0, 1)$ y $v = (0, 1, 1)$.

Se usa la fórmula $\cos \alpha = (u \cdot v) / (|u| \cdot |v|)$. Se calcula el producto escalar y los dos módulos.

$$u \cdot v = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$|u| = \sqrt{2}, \quad |v| = \sqrt{2} \rightarrow |u| \cdot |v| = 2$$

$$\cos \alpha = 1/2 \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Solución: El ángulo es 60° .

4. Calcula un vector perpendicular a la vez a $u = (1, 2, 1)$ y $v = (2, 0, 1)$.

Un vector perpendicular a dos vectores es su producto vectorial $u \times v$, que se calcula con el determinante simbólico.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$i(2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) - j(1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) + k(1 \cdot 0 - 2 \cdot 2)$$

$$= i(2) - j(-1) + k(-4) = (2, 1, -4)$$

Comprobación: $(2, 1, -4) \cdot (1, 2, 1) = 2 + 2 - 4 = 0$ y $(2, 1, -4) \cdot (2, 0, 1) = 4 + 0 - 4 = 0$. Es perpendicular a los dos.

Solución: Un vector perpendicular es $(2, 1, -4)$.

5. Halla el área del triángulo de vértices $A(1,1,0)$, $B(3,1,0)$ y $C(1,4,0)$.

El área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados. Primero los vectores AB y AC.

$$AB = (2, 0, 0), \quad AC = (0, 3, 0)$$

$$AB \times AC = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 3, -(2 \cdot 0 - 0 \cdot 0), 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0) = (0, 0, 6)$$

$$|AB \times AC| = 6 \rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

Solución: El área del triángulo es 3 unidades cuadradas.

6. Comprueba si los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ y $D(1,1,1)$ son coplanarios.

Cuatro puntos son coplanarios si el producto mixto de los tres vectores que salen de uno de ellos es cero. Formamos AB, AC, AD.

$$AB = (-1, 1, 0), \quad AC = (-1, 0, 1), \quad AD = (0, 1, 1)$$

$$[AB, AC, AD] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1(0-1) - 1(-1-0) + 0 = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

Como el producto mixto es 2 (distinto de 0), los puntos NO son coplanarios.

Solución: No son coplanarios (producto mixto = 2).

7. Calcula el valor de a para que los vectores $u = (a, 2, 1)$ y $v = (3, -1, 2)$ sean perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero. Se plantea la ecuación y se despeja a.

$$u \cdot v = a \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = 3a - 2 + 2 = 3a$$

$$3a = 0 \rightarrow a = 0$$

Solución: $a = 0$.

8. Halla el volumen del tetraedro de vértices $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,4)$.

El volumen del tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores desde un vértice.

$$OA = (2, 0, 0), \quad OB = (0, 3, 0), \quad OC = (0, 0, 4)$$

$$[OA,OB,OC] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$V = (1/6) \cdot |24| = 4$$

Solución: El volumen del tetraedro es 4 unidades cúbicas.

9. Dados $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ y $w = (1, a, 1)$: a) ¿para qué valor de a son linealmente dependientes? b) Para ese valor, escribe w como combinación lineal de u y v .

Tres vectores del espacio son dependientes cuando el determinante de sus coordenadas vale 0. Se calcula en función de a y se iguala a cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot a) - 1 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + 0 = (1 - a) + 1 = 2 - a$$

$$2 - a = 0 \rightarrow a = 2$$

Para $a = 2$ se busca $w = x \cdot u + y \cdot v$ igualando coordenada a coordenada: salen tres ecuaciones con dos incógnitas, y la tercera sirve de comprobación.

$$(1, 2, 1) = x \cdot (1, 1, 0) + y \cdot (0, 1, 1) = (x, x + y, y)$$

$$x = 1, y = 1, \text{ y comprobación: } x + y = 2$$

Solución: Son dependientes solo para $a = 2$, y entonces $w = u + v$. Para cualquier otro valor forman una base.

10. Dado $u = (2, -2, 1)$, halla un vector unitario con su misma dirección y sentido.

Un vector unitario tiene módulo 1. Se obtiene dividiendo el vector entre su módulo.

$$|u| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$u / |u| = (2/3, -2/3, 1/3)$$

Solución: El vector unitario es $(2/3, -2/3, 1/3)$.

Siguiente apartado: **3.2 Rectas y planos** — ecuaciones de la recta y el plano, y posiciones relativas de rectas y planos.

3.2 Rectas y planos

Apuntes desarrollados para la PAU. Teoría explicada paso a paso, con ejercicios resueltos al estilo del examen. El bloque de Geometría se divide en tres partes: 3.1 Vectores · **3.2 Rectas y planos** · 3.3 Ángulos, distancias y áreas.

3.2.1 · Ecuaciones de la recta

Una **recta** en el espacio queda determinada por un **punto** $P(x_0, y_0, z_0)$ y un **vector director** $v = (v_1, v_2, v_3)$ que marca su dirección. A partir de estos dos datos se puede escribir de varias formas equivalentes:

Ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Ecuaciones paramétricas (separando cada coordenada):

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot v_3 \end{cases}$$

Ecuación continua (despejando λ e igualando):

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

Si alguna coordenada del director es 0, se sigue escribiendo así por convenio, pero ese cociente no es una división: significa que esa coordenada no cambia. Por ejemplo, $(x - 1)/2 = (y - 3)/0 = z/5$ quiere decir $y = 3$.

Ecuaciones implícitas (o cartesianas): la recta como corte de dos planos no paralelos.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Para pasar de implícitas a paramétricas, el director es el producto vectorial de los dos normales, $v = n_1 \times n_2$, y un punto se saca dando un valor a una incógnita y resolviendo las otras dos. También vale resolver el sistema directamente con una incógnita como parámetro.

✓ **Truco.** Todas las formas contienen la misma información: un punto y un vector director. Para pasar de una a otra solo hay que identificar esos dos elementos. Si te dan dos puntos, el vector director es el que va de uno a otro.

3.2.2 · Ecuaciones del plano

Un **plano** queda determinado por un **punto** y un **vector normal** $n = (A, B, C)$ perpendicular al plano. Su ecuación general (o implícita) es:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

Los coeficientes (A, B, C) son justo las coordenadas del **vector normal** al plano. Esta es la propiedad más útil: mirando la ecuación de un plano, ya sabes su vector perpendicular.

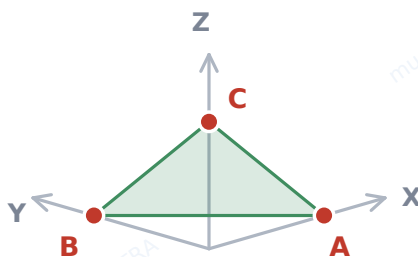


Figura 3 - Plano que corta a los tres ejes en los puntos A, B y C.

Un plano también se puede definir por **tres puntos** no alineados o por un punto P y **dos vectores directores** u y v no paralelos. Entonces su ecuación vectorial es $(x, y, z) = P + \lambda \cdot u + \mu \cdot v$, y la general se obtiene de dos maneras equivalentes: con el normal $n = u \times v$, o igualando a cero este determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

✓ **Truco.** Los coeficientes A, B, C de la ecuación del plano son las coordenadas de su vector normal. Por eso, para hallar una recta perpendicular a un plano se usa (A, B, C) como vector director de la recta, y para hallar un plano perpendicular a una recta se usa el director de la recta como normal del plano.

3.2.3 · Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas en el espacio pueden ser: **coincidentes**, **paralelas**, **secantes** (se cortan en un punto) o **cruzarse** (no se cortan y no son paralelas). Se estudian con los directores u y v y el vector PQ que une un punto P de la primera con un punto Q de la segunda.

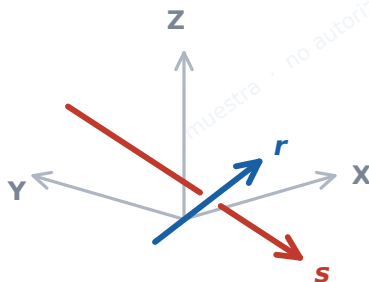


Figura 4 - Dos rectas que se cruzan: en el dibujo parecen cortarse, pero una pasa por detrás de la otra.

Se compara el rango de la matriz M , con filas u y v , con el de la matriz M' , que añade la fila PQ :

- $\text{rg } M = 1$ y $\text{rg } M' = 1$: **coincidentes**.
- $\text{rg } M = 1$ y $\text{rg } M' = 2$: **paralelas**.
- $\text{rg } M = 2$ y $\text{rg } M' = 2$, es decir, $[PQ, u, v] = 0$: **secantes**.
- $\text{rg } M = 2$ y $\text{rg } M' = 3$, es decir, $[PQ, u, v] \neq 0$: **se cruzan**.

✓ **Truco.** El método rápido: si los directores son proporcionales, las rectas son paralelas o coincidentes, y se decide mirando si un punto de una está en la otra. Si no son proporcionales, se calcula el producto mixto $[PQ, u, v]$: si da 0, se cortan; si da distinto de 0, se cruzan.

3.2.4 · Posiciones relativas de recta y plano

Una recta y un plano pueden: ser la recta **paralela** al plano, estar **contenida** en él, o **cortarlo** en un punto. Se estudia con el vector director de la recta (v) y el normal del plano (n):

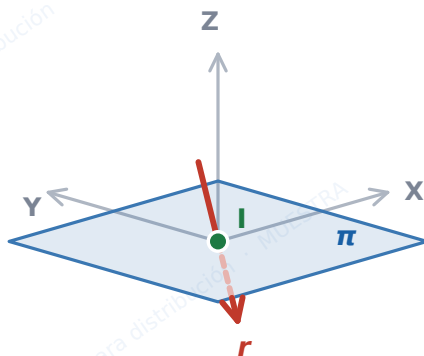


Figura 5 - Recta r que corta al plano π en el punto I ; el tramo que queda tapado por el plano va más claro.

Si $v \cdot n \neq 0$, la recta **corta** al plano en un punto, que se halla sustituyendo la recta en la ecuación del plano. Si $v \cdot n = 0$ (director perpendicular al normal), la recta es **paralela o está contenida**, y se decide con un punto P de la recta: si P cumple la ecuación del plano, la recta está contenida; si no la cumple, es paralela.

Si la recta viene en implícitas, sus dos ecuaciones y la del plano forman un sistema de tres ecuaciones: $\text{rg } M = 3$, secantes; $\text{rg } M = 2$ y $\text{rg } M^* = 3$, paralelos; $\text{rg } M = \text{rg } M^* = 2$, recta contenida en el plano.

✓ **Truco.** Para hallar el punto de corte de una recta y un plano: escribe la recta en paramétricas, sustituye x, y, z en la ecuación del plano, despeja λ , y ese valor te da el punto al sustituirlo de nuevo en la recta.

3.2.5 · Posiciones relativas de dos y tres planos

Aquí la geometría se convierte en álgebra: las ecuaciones de los planos forman un sistema, y **los puntos comunes a todos los planos son las soluciones de ese sistema**. Se comparan el rango de la matriz de coeficientes M y el de la ampliada M^* , igual que en el teorema de Rouché-Frobenius.

Dos planos (M tiene dos filas):

- $\text{rg } M = 1$ y $\text{rg } M^* = 1$: **coincidentes** (las dos ecuaciones son proporcionales).
- $\text{rg } M = 1$ y $\text{rg } M^* = 2$: **paralelos** (los normales son proporcionales y los términos independientes no).
- $\text{rg } M = 2$: **secantes**; se cortan en una recta.

Tres planos (M es 3×3):

- $\text{rg } M = 3$: los tres se cortan en **un punto** (sistema compatible determinado).
- $\text{rg } M = 2$ y $\text{rg } M^* = 2$: se cortan en **una recta** (sistema compatible indeterminado). Puede que dos sean coincidentes y el tercero los corte.
- $\text{rg } M = 2$ y $\text{rg } M^* = 3$: no tienen ningún punto común. Si dos filas de M son proporcionales, hay **dos planos paralelos** cortados por el tercero; si no, los planos se cortan **dos a dos** en tres rectas paralelas, formando un prisma.
- $\text{rg } M = 1$ y $\text{rg } M^* = 2$: los tres son **paralelos** (dos de ellos pueden ser coincidentes).
- $\text{rg } M = 1$ y $\text{rg } M^* = 1$: los tres son **coincidentes**.

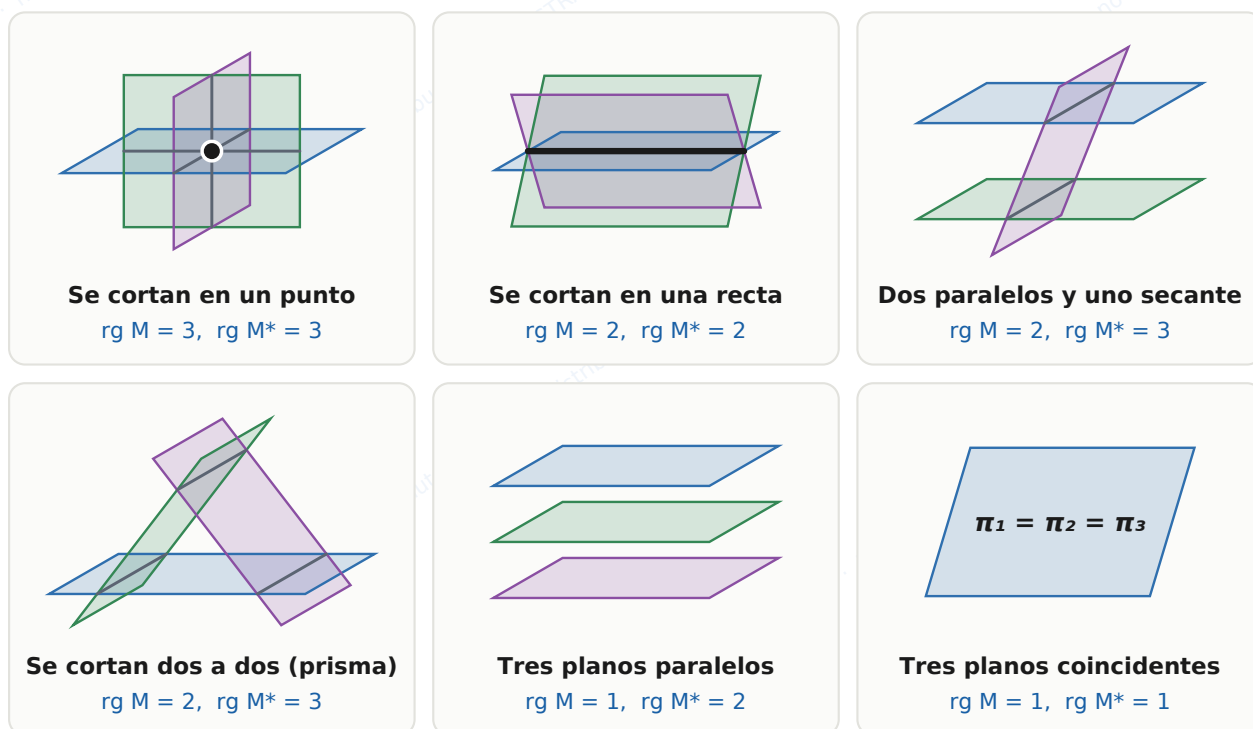


Figura 6 - Las seis posiciones de tres planos. En negro, lo que tienen en común los tres (las soluciones del sistema); en gris, las rectas donde se cortan solo dos.

✓ **Truco.** Con un parámetro, se calcula $\det M$: los valores que no lo anulan dan $\text{rg } M = 3$ y los tres planos se cortan en un punto. Solo hay que estudiar aparte los valores que anulan el determinante.

✗ **Error típico.** Decir que "no hay solución, así que los planos son paralelos". Un sistema incompatible no significa planos paralelos: con $\text{rg } M = 2$ y $\text{rg } M^* = 3$ también pueden cortarse dos a dos sin que ninguno sea paralelo a otro. Para decir paralelos hay que ver normales proporcionales.

Ejercicios

Quince ejercicios de rectas y planos al estilo de la PAU, resueltos. En **rojo** va la explicación de qué se hace y por qué; en negro, la resolución con los cálculos.

1. Halla la ecuación continua de la recta que pasa por A(1, 2, 3) con vector director $v = (2, -1, 4)$.

La ecuación continua se forma con $(x-x_0)/v_1 = (y-y_0)/v_2 = (z-z_0)/v_3$, usando el punto y el director.

$$(x-1)/2 = (y-2)/(-1) = (z-3)/4$$

Solución: $(x-1)/2 = (y-2)/(-1) = (z-3)/4$.

2. Escribe la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(1, 0, 2) y B(3, 2, 2).

Primero se halla el vector director como $AB = B - A$. Luego se usa junto con un punto para escribir la recta.

$$v = AB = (3-1, 2-0, 2-2) = (2, 2, 0)$$

$$\text{Paramétricas: } x = 1+2\lambda, y = 2\lambda, z = 2$$

Solución: $x = 1+2\lambda, y = 2\lambda, z = 2$.

3. Halla la ecuación del plano que pasa por P(1, 1, 1) y tiene vector normal $n = (2, -1, 3)$.

Los coeficientes A, B, C del plano son las coordenadas del vector normal. Se sustituye el punto para hallar D.

$$2x - y + 3z + D = 0$$

$$\text{Sustituyendo P: } 2 - 1 + 3 + D = 0 \rightarrow D = -4$$

Solución: $2x - y + 3z - 4 = 0$.

4. Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos A(1,0,0), B(0,1,0) y C(0,0,1).

Se hallan dos vectores del plano (AB y AC), su producto vectorial da el vector normal, y con un punto se obtiene la ecuación.

$$AB=(-1,1,0), AC=(-1,0,1)$$

$$n = AB \times AC = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0, -((-1) \cdot 1 - 0 \cdot (-1)), (-1) \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) = (1, 1, 1)$$

$$x + y + z + D = 0, \text{ con } A(1,0,0): 1+D=0 \rightarrow D=-1$$

Comprobación con los otros dos puntos: B da $0 + 1 + 0 - 1 = 0$ y C da $0 + 0 + 1 - 1 = 0$.

Solución: $x + y + z - 1 = 0$.

5. Estudia la posición relativa de las rectas r: $(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(1,1,0)$ y s: $(x,y,z)=(0,1,0)+\mu(2,2,0)$.

Se comparan los vectores directores. Si son proporcionales, son paralelas o coincidentes; se comprueba con un punto.

$$\text{Director de r: } (1,1,0). \text{ Director de s: } (2,2,0) = 2 \cdot (1,1,0)$$

Los directores son proporcionales, así que son paralelas o coincidentes. Se mira si el punto (1, 0, 0) de r está en s:

$$x: 1 = 2\mu \rightarrow \mu = 1/2; y: 0 = 1 + 2\mu = 2 \rightarrow \text{imposible}$$

El punto de r no está en s, luego no son coincidentes.

Solución: Las rectas son paralelas.

6. Halla el punto de corte de la recta $r: x=\lambda, y=1+\lambda, z=2-\lambda$ con el plano $\pi: x+y+z=6$.

Se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta en el plano, se despeja λ y se obtiene el punto.

$$\lambda + (1+\lambda) + (2-\lambda) = 6 \rightarrow \lambda + 3 = 6 \rightarrow \lambda = 3$$

$$\text{Punto: } x=3, y=4, z=-1$$

Comprobación en el plano: $3 + 4 + (-1) = 6$.

Solución: El punto de corte es $(3, 4, -1)$.

7. Estudia la posición relativa de la recta r , que pasa por $P(1, 0, 0)$ con director $(1, 1, 1)$, y el plano $\pi: 2x - y - z = 5$.

Se calcula el producto escalar del director de la recta por el normal del plano. Si no es 0, la recta corta al plano; si es 0, es paralela o está contenida, y lo decide un punto de la recta.

$$\text{Normal del plano: } n = (2, -1, -1)$$

$$v \cdot n = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = 2 - 1 - 1 = 0$$

Como $v \cdot n = 0$, la recta es paralela al plano o está contenida en él. Se sustituye P en la ecuación del plano:

$$2 \cdot 1 - 0 - 0 = 2 \neq 5 \rightarrow P \text{ no está en } \pi$$

Solución: La recta es paralela al plano (no está contenida en él).

8. Halla la recta que pasa por $P(2, 1, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi: x - 2y + z = 3$.

Una recta perpendicular a un plano tiene como director el vector normal del plano, que son sus coeficientes.

$$\text{Normal del plano: } n = (1, -2, 1) \rightarrow \text{director de la recta}$$

$$\text{Paramétricas: } x = 2+\lambda, y = 1-2\lambda, z = \lambda$$

Solución: $x = 2+\lambda, y = 1-2\lambda, z = \lambda$.

9. Determina si el punto $Q(2, 3, 1)$ pertenece al plano $\pi: x + y - z - 4 = 0$.

Un punto pertenece a un plano si al sustituir sus coordenadas se cumple la ecuación (da 0).

$$2 + 3 - 1 - 4 = 0 \rightarrow \text{se cumple}$$

Solución: Sí, el punto Q pertenece al plano.

10. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r: x=1+\lambda, y=\lambda, z=2$ y pasa por el punto $Q(0, 0, 0)$.

El plano contiene el director de la recta y el vector de un punto de la recta a Q . El producto vectorial de ambos da el normal.

$$\text{Director de } r: (1, 1, 0). \text{ Punto de } r: P(1, 0, 2). PQ = (-1, 0, -2)$$

$$n = (1, 1, 0) \times (-1, 0, -2) = (1 \cdot (-2) - 0 \cdot 0, -(1 \cdot (-2) - 0 \cdot (-1)), 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) = (-2, 2, 1)$$

$$-2x + 2y + z + D = 0, \text{ con } Q(0, 0, 0): D=0$$

Comprobación: el punto $P(1, 0, 2)$ de la recta cumple $-2 + 0 + 2 = 0$, y el director cumple $(1, 1, 0) \cdot (-2, 2, 1) = 0$, así que la recta entera está en el plano.

Solución: $-2x + 2y + z = 0$.

11. Dadas las rectas $r: (x,y,z) = (1,2,0) + \lambda(1,-1,1)$ y $s: (x,y,z) = (0,a,1) + \mu(2,1,0)$, halla a para que se corten y, para ese valor, el punto de corte. ¿Qué pasa con los demás valores de a ?

Los directores $(1, -1, 1)$ y $(2, 1, 0)$ no son proporcionales, así que las rectas o se cortan o se cruzan. Se cortan cuando el producto mixto de PQ y los dos directores vale 0.

$$P(1,2,0), Q(0,a,1) \rightarrow PQ = (-1, a-2, 1)$$

$$[PQ, u, v] = \begin{vmatrix} -1 & a-2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot (0 - 1) - (a-2) \cdot (0 - 2) + 1 \cdot (1 + 2) = 1 + 2a - 4 + 3 = 2a$$

$$2a = 0 \rightarrow a = 0$$

Para $a = 0$ se igualan las coordenadas de las dos rectas: $(1+\lambda, 2-\lambda, \lambda) = (2\mu, \mu, 1)$. La tercera da $\lambda = 1$ directamente.

$$\lambda = 1 \rightarrow \text{punto de } r: (2, 1, 1) ; \text{ en } s: 2\mu = 2 \rightarrow \mu = 1 \rightarrow (2, 1, 1)$$

Solución: Se cortan solo para $a = 0$, en el punto $(2, 1, 1)$. Para $a \neq 0$ se cruzan.

12. Estudia, según los valores de a , la posición relativa de los planos $\pi_1: x + y + z = 1$, $\pi_2: x - y + z = 3$ y $\pi_3: x + y + az = 2$.

Los tres planos forman un sistema. Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes M: donde no se anula, $\text{rg } M = 3$ y los planos se cortan en un punto.

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot (-a - 1) - 1 \cdot (a - 1) + 1 \cdot (1 + 1) = 2 - 2a$$

$$2 - 2a = 0 \rightarrow a = 1$$

Para $a = 1$ la tercera ecuación es $x + y + z = 2$: sus coeficientes son los de π_1 y el término independiente no, así que π_1 y π_3 son paralelos. $\text{rg } M = 2$; falta ver M^* , con un menor de orden 3 que use la columna de términos independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 - 3) - 1 \cdot (2 - 3) + 1 \cdot (1 + 1) = -5 + 1 + 2 = -2 \neq 0 \rightarrow \text{rg } M^* = 3$$

Solución: Si $a \neq 1$, los tres planos se cortan en un punto. Si $a = 1$, π_1 y π_3 son paralelos y π_2 corta a los dos (no hay ningún punto común a los tres).

13. Halla el plano que pasa por $P(1, 1, 2)$ y es perpendicular a la recta $r: (x - 1)/2 = y/(-1) = (z + 3)/1$.

Si el plano es perpendicular a la recta, el director de la recta es el vector normal del plano. Con el punto P se halla D.

$$\text{Director de } r: (2, -1, 1) \rightarrow \text{plano } 2x - y + z + D = 0$$

$$\text{Con } P: 2 - 1 + 2 + D = 0 \rightarrow D = -3$$

Solución: $2x - y + z - 3 = 0$.

14. Escribe en paramétricas la recta r dada por los planos $x + y - z = 1$ y $2x - y + z = 2$.

El director es el producto vectorial de los dos normales, porque la recta está en los dos planos y es perpendicular a ambos normales. Un punto se saca resolviendo el sistema con un valor cómodo.

$$n_1 \times n_2 = (1, 1, -1) \times (2, -1, 1)$$

$$= (1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1), -(1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2), 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2) = (0, -3, -3)$$

Se toma como director $(0, 1, 1)$, que tiene la misma dirección.

Sumando las dos ecuaciones: $3x = 3 \rightarrow x = 1$. Entonces $y - z = 0$; con $z = 0$, $y = 0 \rightarrow$ punto $(1, 0, 0)$

Comprobación: $(1, 0, 0)$ cumple $1 + 0 - 0 = 1$ y $2 - 0 + 0 = 2$; y el director cumple $(0,1,1) \cdot (1,1,-1) = 0$ y $(0,1,1) \cdot (2,-1,1) = 0$.

Solución: $x = 1, y = \lambda, z = \lambda$.

15. Halla la recta que pasa por $P(1, 0, 2)$ y corta a las rectas $r: (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(1,1,0)$ y $s: (x,y,z) = (0,0,2) + \mu(0,1,1)$.

Primero se comprueba que r y s se cruzan: si se cortaran o fueran paralelas, estarían en un mismo plano y el problema sería otro. Con $A(1, 0, 0)$ de r y $B(0, 0, 2)$ de s :

$$AB = (-1, 0, 2)$$

$$[AB, u, v] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1 - 0) - 0 \cdot (1 - 0) + 2 \cdot (1 - 0) = 1 \neq 0 \rightarrow \text{se cruzan}$$

La recta buscada corta a r y pasa por P , así que está en el plano que contiene a P y a r . Por lo mismo, está en el plano que contiene a P y a s . Es la intersección de esos dos planos.

$$\text{Plano } \pi_1 (P \text{ y } r): PA = (0, 0, -2)$$

$$n_1 = PA \times u = (0 \cdot 0 - (-2) \cdot 1, -(0 \cdot 0 - (-2) \cdot 1), 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = (2, -2, 0)$$

Se toma $n_1 = (1, -1, 0)$, que tiene la misma dirección.

$$\pi_1: x - y + D = 0, \text{ con } A(1, 0, 0): 1 + D = 0 \rightarrow D = -1 \rightarrow x - y - 1 = 0$$

$$\text{Plano } \pi_2 (P \text{ y } s): PB = (-1, 0, 0)$$

$$n_2 = PB \times v = (0 \cdot 1 - 0 \cdot 1, -((-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0), (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0, 1, -1)$$

$$\pi_2: y - z + D = 0, \text{ con } B(0, 0, 2): -2 + D = 0 \rightarrow D = 2 \rightarrow y - z + 2 = 0$$

El director de la recta es el producto vectorial de los dos normales, y la recta pasa por P .

$$n_1 \times n_2 = (1, -1, 0) \times (0, 1, -1)$$

$$= ((-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 1, -(1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0), 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0) = (1, 1, 1)$$

Falta ver que no es paralela a r ni a s : si lo fuera, estaría en su plano sin cortar a esa recta y no habría solución. $(1, 1, 1)$ no es proporcional ni a $(1, 1, 0)$ ni a $(0, 1, 1)$. Los puntos de corte, con la recta escrita como $(1 + k, k, 2 + k)$:

$$\text{Con } r: (1 + k, k, 2 + k) = (1 + \lambda, \lambda, 0) \rightarrow k = -2, \lambda = -2 \rightarrow (-1, -2, 0)$$

$$\text{Con } s: (1 + k, k, 2 + k) = (0, \mu, 2 + \mu) \rightarrow k = -1, \mu = -1 \rightarrow (0, -1, 1)$$

Comprobación: $P, (-1, -2, 0)$ y $(0, -1, 1)$ están alineados, porque de uno a otro se avanza siempre $(1, 1, 1)$; y P cumple las dos ecuaciones: $1 - 0 - 1 = 0$ y $0 - 2 + 2 = 0$.

Solución: $x = 1 + k, y = k, z = 2 + k$. Corta a r en $(-1, -2, 0)$ y a s en $(0, -1, 1)$.

Siguiente apartado: **3.3 Ángulos, distancias y áreas** — problemas métricos en el espacio, proyecciones y simétricos.

3.3 Ángulos, distancias y áreas

Apuntes desarrollados para la PAU. Teoría explicada paso a paso, con ejercicios resueltos al estilo del examen. El bloque de Geometría se divide en tres partes: 3.1 Vectores · 3.2 Rectas y planos · **3.3 Ángulos, distancias y áreas.**

3.3.1 · Ángulos

Todos los ángulos en el espacio se calculan con el **producto escalar**, tomando el valor absoluto: así sale siempre el menor de los dos ángulos que forman los elementos, que está entre 0° y 90° . Según los elementos:

- **Entre dos rectas:** se usa el ángulo entre sus vectores directores.
- **Entre dos planos:** se usa el ángulo entre sus vectores normales.
- **Entre recta y plano:** es el complementario del ángulo entre el director de la recta y el normal del plano; por eso se usa el seno en vez del coseno.

$$\cos \alpha = \frac{|u \cdot v|}{|u| \cdot |v|}$$

$$\sin \alpha = \frac{|v \cdot n|}{|v| \cdot |n|} \quad (\text{recta con director } v \text{ y plano con normal } n)$$

✓ **Truco.** Para no confundirte: recta con recta y plano con plano usan COSENO (con directores o normales). Recta con plano usa SENO, porque el ángulo se mide respecto al plano, no respecto a su normal.

3.3.2 · Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ al plano $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ se calcula sustituyendo el punto en la ecuación del plano, en valor absoluto, dividido por el módulo del vector normal:

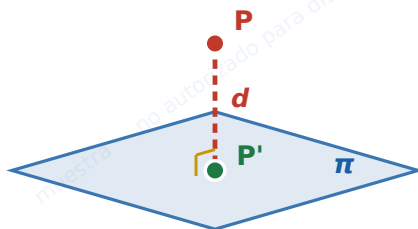


Figura 7 - La distancia d de P al plano π se mide sobre la perpendicular, que llega al plano en P' .

$$d(P, \pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

✓ **Truco.** En el numerador va el punto sustituido en la ecuación del plano (en valor absoluto), y en el denominador el módulo del vector normal (A, B, C). Es sustituir y dividir, nada más.

3.3.3 · Distancia entre otros elementos

Punto a recta: se calcula con el producto vectorial. Si la recta pasa por A con director v , y el punto es P, el módulo de $AP \times v$ es el área del paralelogramo, y al dividir por la base $|v|$ queda la altura, que es la distancia:

$$d(P, r) = \frac{|AP \times v|}{|v|}$$

Entre dos rectas que se cruzan: si r pasa por A con director u y s pasa por B con director v , el producto mixto da el volumen del paralelepípedo, y al dividir por el área de la base, $|u \times v|$, queda la altura:

$$d(r, s) = \frac{|[AB, u, v]|}{|u \times v|}$$

Entre dos rectas paralelas: se toma un punto de una y se calcula su distancia a la otra (punto a recta). Si las rectas se cortan, la distancia es 0.

Entre una recta y un plano paralelos: se toma un punto de la recta y se calcula su distancia al plano. Si la recta corta al plano o está en él, la distancia es 0.

Entre planos paralelos: se toma un punto de uno y se calcula su distancia al otro. Si los dos se escriben con los mismos A, B y C, hay un atajo:

$$d(\pi, \pi') = |D - D'| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

✓ **Truco.** Casi todas las distancias se reducen a la de punto-plano o a fórmulas con productos vectorial y mixto. Antes de aplicar una fórmula, estudia la posición relativa: la distancia entre elementos que se cortan es 0.

3.3.4 · Áreas y volúmenes

Se calculan con los productos vectorial y mixto que vimos en 3.1:

- **Área del paralelogramo** de lados AB y AD: el módulo del producto vectorial. La del **triángulo** de vértices A, B, C es la mitad.

$$\text{Área paralelogramo} = |AB \times AD| \quad \text{Área triángulo} = \frac{1}{2} \cdot |AB \times AC|$$

- **Volumen del paralelepípedo** de aristas AB, AC y AD: el valor absoluto del producto mixto. El del **tetraedro** de vértices A, B, C, D es un sexto.

$$V \text{ paralelepípedo} = |[AB, AC, AD]| \quad V \text{ tetraedro} = (1/6) \cdot |[AB, AC, AD]|$$

✓ **Truco.** Para el área de un triángulo o el volumen de un tetraedro, solo tienes que formar los vectores desde un vértice y aplicar el producto vectorial (áreas) o mixto (volúmenes).

3.3.5 · Proyecciones, simétricos y perpendicular común

La **proyección ortogonal** de un punto P sobre un plano o una recta es el punto P' donde cae la perpendicular trazada desde P . El **simétrico** P'' es el punto que queda al otro lado, a la misma distancia: P' es el punto medio de P y P'' . Todos los casos siguen el mismo esquema, proyectar y duplicar:

$$P' = \text{punto medio de } P \text{ y } P'' \rightarrow P'' = 2 \cdot P' - P$$

- **Respecto de un plano π :** se traza la recta que pasa por P con el normal de π como director; su corte con π es la proyección P' .
- **Respecto de una recta r :** se traza el plano que pasa por P con el director de r como normal; su corte con r es la proyección P' .
- **Respecto de un punto M :** no hay nada que proyectar, M ya es el punto medio: $P'' = 2 \cdot M - P$.

La **recta proyección** de una recta r sobre un plano π se obtiene proyectando dos de sus puntos y uniéndolos, o cortando π con el plano que contiene a r y es perpendicular a π (su normal es $v \times n$). La **recta simétrica** de r respecto de π se obtiene igual, uniendo los simétricos de dos puntos de r .

La **perpendicular común** a dos rectas que se cruzan es la recta que corta a las dos formando ángulo recto con ambas. Se toma un punto genérico de cada recta, $R(\lambda)$ y $S(\mu)$, y se impone que el vector RS sea perpendicular a los dos directores: $RS \cdot u = 0$ y $RS \cdot v = 0$. Salen λ y μ , y la recta pasa por R y S . Además, $|RS|$ es la distancia entre las dos rectas.

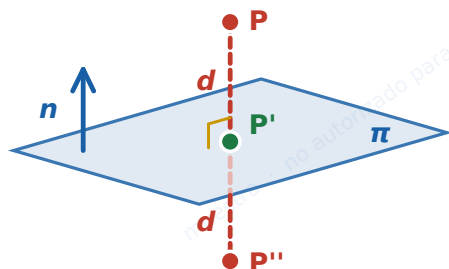


Figura 8 - P' es la proyección de P sobre π y el punto medio entre P y su simétrico P'' .

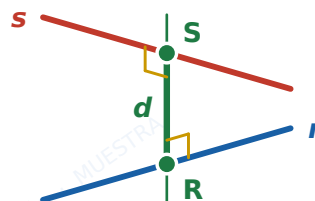


Figura 9 - La perpendicular común corta a r en R y a s en S en ángulo recto; $|RS| = d(r, s)$.

✓ **Truco.** Comprueba siempre el resultado: la proyección tiene que cumplir la ecuación del plano (o de la recta), y el vector PP' tiene que ser perpendicular a la recta, o paralelo al normal del plano.

Ejercicios

Trece ejercicios de ángulos, distancias, áreas y simétricos al estilo de la PAU, resueltos. En rojo va la explicación de qué se hace y por qué; en negro, la resolución con los cálculos.

1. Calcula la distancia del punto $P(1, 2, 3)$ al plano $\pi: 2x - y + 2z - 3 = 0$.

Se sustituye el punto en la ecuación del plano (valor absoluto) y se divide por el módulo del normal $(2, -1, 2)$.

$$\text{Numerador: } |2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 3 - 3| = |2 - 2 + 6 - 3| = |3| = 3$$

$$\text{Denominador: } \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$

$$d = 3/3 = 1$$

Solución: La distancia es 1.

2. Halla el ángulo que forman los planos $\pi: x + y = 0$ y $\sigma: x - z = 0$.

El ángulo entre dos planos es el de sus vectores normales. Se aplica la fórmula del coseno con los normales.

$$n_1 = (1, 1, 0), \quad n_2 = (1, 0, -1)$$

$$\cos \alpha = |1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)| / (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 1/2$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Solución: Los planos forman un ángulo de 60° .

3. Calcula el área del triángulo de vértices $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

El área es la mitad del módulo del producto vectorial de dos lados AB y AC.

$$AB = (-1, 2, 0), \quad AC = (-1, 0, 3)$$

$$AB \times AC = (2 \cdot 3 - 0 \cdot 0, -((-1) \cdot 3 - 0 \cdot (-1)), (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-1)) = (6, 3, 2)$$

$$|AB \times AC| = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7 \rightarrow \text{Área} = 7/2$$

Solución: El área es $7/2 = 3,5$ unidades cuadradas.

4. Halla la distancia entre los planos paralelos $\pi: x + 2y + 2z = 3$ y $\sigma: x + 2y + 2z = 9$.

Se toma un punto de uno de los planos y se calcula su distancia al otro con la fórmula punto-plano.

$$\text{Punto de } \pi: (3, 0, 0). \text{ Distancia a } \sigma:$$

$$|3 + 0 + 0 - 9| / \sqrt{1+4+4} = 6/3 = 2$$

Solución: La distancia entre los planos es 2.

5. Calcula el ángulo entre la recta r con director $(1, 1, 0)$ y el plano $\pi: z = 0$ (normal $(0,0,1)$).

Entre recta y plano se usa el SENO (no el coseno), con el director de la recta y el normal del plano.

$$\sin \alpha = |(1, 1, 0) \cdot (0, 0, 1)| / (\sqrt{2} \cdot 1) = 0/\sqrt{2} = 0$$

$$\alpha = 0^\circ$$

Un ángulo de 0° significa que la recta es paralela al plano o está contenida en él.

Solución: El ángulo es 0° (la recta es paralela al plano o está contenida en él).

6. Halla el volumen del tetraedro de vértices $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,2,0)$ y $D(0,0,3)$.

El volumen es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores desde A.

$$AB = (1, 0, 0), \quad AC = (0, 2, 0), \quad AD = (0, 0, 3)$$

$$[AB, AC, AD] = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$V = (1/6) \cdot 6 = 1$$

Solución: El volumen es 1 unidad cúbica.

7. Calcula la distancia del punto $P(1, 1, 1)$ a la recta $r: x=\lambda, y=0, z=0$ (pasa por O con director $(1,0,0)$).

La distancia punto-recta es $|OP \times v| / |v|$, donde v es el director de la recta y O un punto de ella.

$$OP=(1,1,1), \quad v=(1,0,0)$$

$$OP \times v = (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0, -(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1), 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = (0, 1, -1)$$

$$|OP \times v| = \sqrt{2}; \quad |v| = 1 \rightarrow d = \sqrt{2}$$

Solución: La distancia es $\sqrt{2}$.

8. Halla el ángulo entre las rectas de directores $u = (1, 0, 1)$ y $v = (1, 1, 0)$.

El ángulo entre dos rectas es el de sus directores, con la fórmula del coseno en valor absoluto.

$$u \cdot v = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$$

$$\cos \alpha = |1| / (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 1/2 \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Solución: El ángulo es 60° .

9. Determina la distancia del punto $P(3, 0, 0)$ al plano coordenado YZ (plano $x = 0$).

El plano YZ tiene ecuación $x = 0$, con normal $(1,0,0)$. Se aplica la fórmula punto-plano.

$$d = |1 \cdot 3 + 0 + 0 + 0| / \sqrt{1+0+0} = 3/1 = 3$$

Solución: La distancia es 3.

10. Halla la proyección ortogonal del punto $P(2, 3, 4)$ sobre el plano $\pi: x + y + z - 3 = 0$ y el punto simétrico de P respecto de π .

Se traza la recta que pasa por P y es perpendicular a π : su director es el normal $(1, 1, 1)$. Donde corta a π está la proyección P' .

$$\text{Recta: } x = 2 + \lambda, \quad y = 3 + \lambda, \quad z = 4 + \lambda$$

$$\text{En } \pi: (2+\lambda) + (3+\lambda) + (4+\lambda) - 3 = 0 \rightarrow 3\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda = -2$$

$$P' = (0, 1, 2); \text{ comprobación en } \pi: 0 + 1 + 2 - 3 = 0$$

P' es el punto medio de P y su simétrico P'' , así que $P'' = 2 \cdot P' - P$.

$$P'' = (2 \cdot 0 - 2, 2 \cdot 1 - 3, 2 \cdot 2 - 4) = (-2, -1, 0)$$

Comprobación: $d(P, \pi) = |2 + 3 + 4 - 3| / \sqrt{3} = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, y $|PP'| = |(-2, -2, -2)| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Coinciden.

Solución: La proyección es $P'(0, 1, 2)$ y el simétrico es $P''(-2, -1, 0)$.

11. Halla el punto simétrico de $P(3, 0, 0)$ respecto de la recta $r: x = y = z$.

La recta pasa por el origen con director $v = (1, 1, 1)$. Se traza el plano que pasa por P y es perpendicular a r (normal v); su corte con r es la proyección P' .

$$\text{Plano: } x + y + z + D = 0; \text{ con } P: 3 + D = 0 \rightarrow x + y + z - 3 = 0$$

$$\text{Recta en paramétricas: } (\lambda, \lambda, \lambda) \rightarrow 3\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow P' = (1, 1, 1)$$

$$P'' = 2 \cdot P' - P = (2 - 3, 2 - 0, 2 - 0) = (-1, 2, 2)$$

Comprobación: $PP' = (-2, 1, 1)$ es perpendicular a r , porque $(-2, 1, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0$; y $P'P'' = (-2, 1, 1)$ es el mismo vector, así que P' está en medio.

Solución: El simétrico es $P''(-1, 2, 2)$.

12. Comprueba que las rectas $r: (x,y,z) = (1,0,0) + \lambda(1,1,0)$ y $s: (x,y,z) = (0,0,2) + \mu(0,1,1)$ se cruzan y calcula la distancia entre ellas.

Los directores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (0, 1, 1)$ no son proporcionales. Si además el producto mixto $[AB, u, v]$ no es 0, se cruzan, y ese mismo producto mixto sirve para la distancia.

$$A(1,0,0), B(0,0,2) \rightarrow AB = (-1, 0, 2)$$

$$u \times v = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1, -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0), 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (1, -1, 1); \quad |u \times v| = \sqrt{3}$$

$$[AB, u, v] = AB \cdot (u \times v) = -1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 1 \neq 0 \rightarrow \text{se cruzan}$$

$$d(r, s) = |1| / \sqrt{3} = \sqrt{3}/3$$

Solución: Se cruzan, y la distancia entre ellas es $\sqrt{3}/3 \approx 0,58$.

13. Halla la perpendicular común a las rectas r y s del ejercicio anterior.

Se toma un punto genérico de cada recta y se impone que el vector que los une sea perpendicular a los dos directores.

$$R = (1+\lambda, \lambda, 0), S = (0, \mu, 2+\mu) \rightarrow RS = (-1-\lambda, \mu-\lambda, 2+\mu)$$

$$RS \cdot u = (-1-\lambda) + (\mu-\lambda) = -1 - 2\lambda + \mu = 0$$

$$RS \cdot v = (\mu-\lambda) + (2+\mu) = 2 - \lambda + 2\mu = 0$$

$$\text{De la primera, } \mu = 1 + 2\lambda; \text{ en la segunda: } 2 - \lambda + 2 + 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -4/3, \mu = -5/3$$

$$R = (-1/3, -4/3, 0), S = (0, -5/3, 1/3) \rightarrow RS = (1/3, -1/3, 1/3)$$

Comprobación: RS es paralelo a $u \times v = (1, -1, 1)$, como debe ser, y $|RS| = \sqrt{(1/9 + 1/9 + 1/9)} = \sqrt{3}/3$, que es la distancia del ejercicio 12.

Solución: La perpendicular común es $(x, y, z) = (-1/3, -4/3, 0) + t \cdot (1, -1, 1)$.

Con este apartado se completa el **Bloque 3 - Geometría** (Vectores, Rectas y planos, y Ángulos, distancias y áreas).