

Bloque 1

Álgebra

Matrices, determinantes y sistemas son en realidad un solo tema contado en tres pasos. Casi todo el bloque acaba dependiendo de una pregunta: ¿cuándo se anula el determinante?

Contenido

1.1 Matrices

Tipos, suma y producto por un número, producto de matrices, potencias, traspuesta e inversa.

1.2 Determinantes

Orden 2 y 3 por Sarrus, desarrollo por adjuntos, propiedades, cálculo de la inversa, rango y ecuaciones matriciales.

1.3 Sistemas de ecuaciones

Método de Gauss, discusión por Rouché-Frobenius, regla de Cramer, sistemas con parámetro e interpretación geométrica.

Apuntes de preparación para la PAU · 2.º de Bachillerato

Ejemplar de muestra gratuito, igual para todos. Prohibida su venta o redistribución sin permiso escrito del titular.

© 2026 PAUmode. Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial, la distribución, la comunicación pública y la transformación de esta obra sin autorización escrita del titular. El incumplimiento podrá dar lugar a las acciones civiles y penales previstas en la legislación sobre propiedad intelectual.

1.1 Matrices

Apuntes desarrollados para la PAU. Teoría explicada paso a paso, con ejemplos resueltos. El bloque de Álgebra se divide en tres partes: **1.1 Matrices** · 1.2 Determinantes · 1.3 Sistemas.

1.1.1 · ¿Qué es una matriz?

Una **matriz** es una tabla de números ordenados en filas y columnas, encerrada entre paréntesis. Se nombra con una letra mayúscula. Aunque parezca solo una tabla, las matrices son una herramienta potentísima: sirven para resolver sistemas de ecuaciones, representar transformaciones geométricas, organizar datos y mucho más.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es una matriz de dimensión } 2 \times 3$$

La **dimensión** (o tamaño) de una matriz se escribe como **filas x columnas**. La matriz A anterior tiene 2 filas y 3 columnas, así que es de dimensión **2x3**. Cuidado con el orden: primero filas, luego columnas.

A cada número de la matriz lo llamamos **elemento**, y lo identificamos con dos subíndices: a_{ij} es el elemento que está en la **fila i** y la **columna j**. Por ejemplo, en A: $a_{11} = 2$, $a_{12} = -1$, $a_{23} = 1$.

✓ **Truco.** El primer subíndice siempre es la fila y el segundo la columna. Un truco para no confundirte: se lee como "bajamos y luego andamos", primero cuentas hacia abajo (fila) y luego hacia la derecha (columna).

1.1.2 · Tipos de matrices

Según su forma y sus elementos, las matrices reciben nombres distintos. Estos son los que necesitas reconocer:

Matriz fila y matriz columna

La **matriz fila** tiene una sola fila; la **matriz columna**, una sola columna.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{fila}) \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (\text{columna})$$

Matriz cuadrada

Tiene el **mismo número de filas que de columnas** (dimensión $n \times n$). Es el tipo más importante, porque solo las matrices cuadradas tienen determinante e inversa. En una matriz cuadrada, la **diagonal principal** son los elementos a_{11} , a_{22} , a_{33} ...

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{cuadrada de orden } 2$$

Matriz nula, diagonal e identidad

La **nula** tiene todos sus elementos cero. La **diagonal** tiene ceros fuera de la diagonal principal. La **identidad** (se escribe I) es una diagonal con unos en la diagonal principal: es el "1" de las matrices, es decir, el **elemento neutro del producto**, porque $A \cdot I = I \cdot A = A$.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular

Es **triangular superior** si todos los elementos **por debajo** de la diagonal son cero, y **triangular inferior** si los que son cero están por encima.

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{triangular superior}$$

1.1.3 · Suma de matrices y producto por un número

Para **sumar** dos matrices deben tener **exactamente la misma dimensión**. Si la tienen, se suman elemento a elemento (cada uno con el que ocupa su misma posición). Si no la tienen, la suma no existe.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

El **producto por un número** (escalar) multiplica ese número por **todos** los elementos de la matriz:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

1.1.4 · Producto de matrices

No es difícil, pero tiene una regla estricta que hay que respetar.

¿Cuándo se pueden multiplicar?

Para poder calcular $A \cdot B$, el número de **columnas de A** debe coincidir con el número de **filas de B**. Si no coinciden, el producto **no existe** (y eso puede ser la respuesta correcta a un ejercicio).

$$A \ (m \times n) \cdot B \ (n \times p) = C \ (m \times p)$$

Los dos números "de dentro" (las n) deben ser iguales para poder multiplicar. Los dos "de fuera" (m y p) te dan la dimensión del resultado.

¿Cómo se calcula cada elemento?

Cada elemento del resultado se obtiene multiplicando una **fila de A** por una **columna de B**, elemento a elemento, y sumando. El elemento de la fila i , columna j del resultado sale de la fila i de A por la columna j de B.

Ejemplo completo, casilla por casilla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Columnas de A = 2, filas de B = 2 $\rightarrow$ se puede multiplicar. El resultado es 2×2 . Calculamos sus cuatro elementos:

$$c_{11} = (\text{fila 1 de A}) \cdot (\text{col 1 de B}) = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 5 + 14 = 19$$

$$c_{12} = (\text{fila 1 de A}) \cdot (\text{col 2 de B}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 6 + 16 = 22$$

$$c_{21} = (\text{fila 2 de A}) \cdot (\text{col 1 de B}) = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 = 15 + 28 = 43$$

$$c_{22} = (\text{fila 2 de A}) \cdot (\text{col 2 de B}) = 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 = 18 + 32 = 50$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

✗ Error típico. No multipliques "elemento con elemento" como en la suma. El producto es SIEMPRE fila por columna. Multiplicar $1 \cdot 5$, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 7$, $4 \cdot 8$ y colocarlos tal cual está mal.

✓ Truco. El producto de matrices **no es conmutativo**: en general $A \cdot B \neq B \cdot A$. Por eso, cuando despejes una matriz en una ecuación, es decisivo si multiplicas por la izquierda o por la derecha (lo verás en el apartado 1.2.8, **Ecuaciones matriciales**).

Propiedades del producto

Las que **sí** se cumplen (siempre que los productos se puedan hacer):

- **Asociativa:** $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- **Distributiva:** $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ y $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$.
- **Elemento neutro:** $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Las que **no** se cumplen, y que en los números sí:

- **No es conmutativo:** en general $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- $A \cdot B$ puede ser la matriz nula sin que A ni B lo sean (ejercicio 7).
- De $A \cdot B = A \cdot C$ no se deduce $B = C$: no se puede «tachar» A. Solo se puede quitar multiplicando por A^{-1} , y únicamente si A tiene inversa.

✗ Error típico. $(A + B)^2$ no es $A^2 + 2A \cdot B + B^2$. Al desarrollarlo sale $(A + B) \cdot (A + B) = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$, y $A \cdot B$ y $B \cdot A$ solo se juntan en $2A \cdot B$ si A y B conmutan.

1.1.5 · Potencia de una matriz

La potencia A^n significa multiplicar la matriz A por sí misma n veces. Solo tiene sentido en **matrices cuadradas**. Para una potencia alta, como A^{100} , no se multiplica a lo bruto: la clave es **calcular las primeras potencias, descubrir el patrón** y generalizarlo.

Hay matrices cuyas potencias son **cíclicas**: se repiten cada cierto número de pasos (por ejemplo, si $A^3 = I$, entonces las potencias se repiten cada 3). Reconocer el ciclo es lo que convierte un problema imposible en uno de diez segundos.

✓ **Truco.** Si al calcular A^2 , A^3 te sale la identidad I o la propia A , ¡has encontrado un ciclo! A partir de ahí, para calcular A^{100} solo tienes que ver qué resto deja 100 al dividir entre la longitud del ciclo.

1.1.6 · Matriz traspuesta

La **traspuesta** de A , que se escribe A^t , se obtiene cambiando filas por columnas: la primera fila pasa a ser la primera columna, y así sucesivamente. Si A es de dimensión $m \times n$, su traspuesta es $n \times m$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Una matriz es **simétrica** si coincide con su traspuesta ($A = A^t$); esto solo puede pasar en matrices cuadradas y significa que es "espejo" respecto a la diagonal principal.

Una matriz es **antisimétrica** si su traspuesta es su opuesta ($A^t = -A$). Eso obliga a que los elementos simétricos sean opuestos ($a_{ij} = -a_{ji}$) y a que la diagonal principal sea toda de ceros, porque un número igual a su opuesto solo puede ser 0.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{simétrica} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{antisimétrica}$$

Propiedades de la traspuesta

- $(A^t)^t = A$
- $(A + B)^t = A^t + B^t$ y $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$: la traspuesta de un producto es el producto de las traspuestas **en orden contrario**.

1.1.7 · Matriz inversa

La **inversa** de una matriz cuadrada A , escrita A^{-1} , es la matriz que cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (la identidad). Es la herramienta que nos permite "despejar" matrices en las ecuaciones, y por eso es tan importante. Una matriz que tiene inversa se llama **regular** (o invertible); si no la tiene, **singular**.

Propiedades de la inversa (cuando existen las inversas que aparecen):

- $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(k \cdot A)^{-1} = (1/k) \cdot A^{-1}$, con $k \neq 0$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$: igual que con la traspuesta, **el orden se invierte**.

No todas las matrices tienen inversa. Solo la tienen las **cuadradas** cuyo **determinante es distinto de cero** (el determinante lo veremos en el apartado 1.2). El cálculo completo de la inversa se hace con determinantes y adjuntos, así que lo desarrollaremos allí; por ahora quédate con la idea clave:

$$A \text{ tiene inversa} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Ejercicios

Diez ejercicios de matrices al estilo de la PAU, resueltos. En **rojo** va la explicación de qué se hace y por qué; en negro, la resolución con los cálculos.

1. Dadas A de dimensión 3×2, B de 2×3, C de 1×2 y D de 2×1, indica qué productos B·A, C·D y D·A se pueden calcular y sus dimensiones.

Para multiplicar, las columnas de la primera deben coincidir con las filas de la segunda; comprobamos las dimensiones interiores de cada producto.

$$B \cdot A: (2 \times 3) \cdot (3 \times 2) \rightarrow 3 = 3 \rightarrow \text{sí, resultado } 2 \times 2$$

$$C \cdot D: (1 \times 2) \cdot (2 \times 1) \rightarrow 2 = 2 \rightarrow \text{sí, resultado } 1 \times 1$$

$$D \cdot A: (2 \times 1) \cdot (3 \times 2) \rightarrow 1 \neq 3 \rightarrow \text{no se puede}$$

Solución: B·A es 2×2, C·D es 1×1, D·A no se puede.

2. Determina a y b para que se cumpla la igualdad de matrices:

$$\begin{bmatrix} a+b & 4 \\ 2 & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Dos matrices son iguales si coinciden elemento a elemento; cada posición con incógnitas da una ecuación y se forma un sistema.

$$(1,1): a+b = 7 \quad (2,2): a-b = 1$$

$$\text{Sumando ambas: } 2a = 8 \rightarrow a = 4 ; \text{ luego } b = 3$$

Solución: a = 4, b = 3.

3. Dada la matriz A, calcula A² y A³ y deduce la expresión de Aⁿ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No se calcula a lo bruto: se hacen las primeras potencias, se observa el patrón y se generaliza.

$$A^2: \quad c_{11}=1 \quad c_{12}=1 \cdot 1 + 1 \cdot 1=2 \quad c_{21}=0 \quad c_{22}=1$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El único elemento que cambia es el de arriba a la derecha, que coincide con el exponente n.

$$\text{Solución: } A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Sea A una matriz que verifica $A^3 = -I$. Calcula A^6 y razona cuánto vale A^{-1} .

Se usa la relación dada operando las potencias como bloques, sin recurrir a la conmutatividad indebidamente.

$$A^6 = (A^3)^2 = (-I)^2 = I$$

Para la inversa: de $A^3 = -I$ se saca $A \cdot (-A^2) = I$, así que la matriz que multiplicada por A da la identidad es $-A^2$.

Solución: $A^6 = I$; $A^{-1} = -A^2$.

5. Estudia para qué valores de a conmutan las matrices A y B, es decir, para cuáles se cumple $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

Se calculan los dos productos por separado y se igualan elemento a elemento. Aquí B es $a \cdot I$ (la identidad por un número), y ese tipo de matriz conmuta con cualquier matriz.

$$A \cdot B: \quad c_{11}=a \quad c_{12}=a \quad c_{21}=0 \quad c_{22}=a$$

$$B \cdot A: \quad c_{11}=a \quad c_{12}=a \quad c_{21}=0 \quad c_{22}=a$$

Ambos productos coinciden para cualquier a, porque multiplicar por $a \cdot I$ es como multiplicar por el número a.

Solución: Conmutan para cualquier valor de a.

6. Dada A tal que $A^2 = I$, calcula la suma $S = A + A^2 + A^3 + A^4$.

Con $A^2 = I$, todas las potencias se reducen a I o a A; se sustituye cada término.

$$A^2 = I \quad ; \quad A^3 = A^2 \cdot A = A \quad ; \quad A^4 = (A^2)^2 = I$$

$$S = A + I + A + I = 2A + 2I$$

Solución: $S = 2A + 2I$.

7. Sea A una matriz 2×2 no nula. ¿Puede ocurrir que $A \cdot A$ sea la matriz nula? Da un ejemplo o razónalo.

Basta encontrar un contraejemplo: una matriz no nula cuyo cuadrado sea la matriz nula.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{11}=0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \quad c_{12}=0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \quad c_{21}=0 \quad c_{22}=0$$

A no es nula pero $A \cdot A$ sí. En números, $x^2=0$ obliga a $x=0$; en matrices esto no se cumple.

Solución: Sí puede ocurrir; el ejemplo lo demuestra.

8. Dada la matriz A, se define $B = 2A - I$. Calcula B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Se multiplica A por 2 (cada elemento) y se le resta la identidad, que solo afecta a la diagonal.

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow B = 2A - I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Solución: } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

9. Calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$ y comprueba si el producto de matrices es conmutativo.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se calculan ambos productos y se comparan; si salen distintos, queda demostrado que no es conmutativo.

$$A \cdot B: \quad c_{11}=2 \quad c_{12}=4 \quad c_{21}=1 \quad c_{22}=5$$

$$B \cdot A: \quad c_{11}=4 \quad c_{12}=6 \quad c_{21}=1 \quad c_{22}=3$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $A \cdot B \neq B \cdot A$, el producto de matrices no es conmutativo.

Solución: $A \cdot B \neq B \cdot A$; no es conmutativo.

10. Una empresa con 2 tiendas vende 3 productos. La matriz U da las unidades vendidas (tiendas $\times$ productos) y P los precios (€). Calcula la recaudación de cada tienda.

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

La recaudación es el producto $U \cdot P$: se colocan las matrices para que las columnas de U (productos) casen con las filas de P (precios).

$$\text{Tienda 1: } 4 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 8 = 40 + 10 + 40 = 90$$

$$\text{Tienda 2: } 3 \cdot 10 + 6 \cdot 5 + 1 \cdot 8 = 30 + 30 + 8 = 68$$

$$U \cdot P = \begin{bmatrix} 90 \\ 68 \end{bmatrix}$$

Solución: Tienda 1: 90 €, Tienda 2: 68 €.

El cálculo de la inversa, el rango y las ecuaciones matriciales están en **1.2 Determinantes**, porque necesitan el determinante.

Siguiente apartado: **1.2 Determinantes** — cálculo (regla de Sarrus, adjuntos), propiedades, cálculo de la inversa, rango y ecuaciones matriciales. Con ejercicios resueltos.

1.2 Determinantes

Apuntes desarrollados para la PAU. Teoría explicada paso a paso, con ejemplos resueltos. El bloque de Álgebra se divide en tres partes: 1.1 Matrices · **1.2 Determinantes** · 1.3 Sistemas.

1.2.1 · ¿Qué es un determinante?

El **determinante** es un número que se asocia a cada **matriz cuadrada** (solo las cuadradas tienen determinante). Se escribe con barras verticales: si la matriz es A, su determinante es $|A|$ o $\det(A)$.

Aunque parezca solo un número, es una herramienta clave: nos dice si una matriz **tiene inversa**, nos permite calcular el **rango**, y sirve para **resolver sistemas**. Su propiedad más importante, la que usarás una y otra vez, es esta:

$$A \text{ tiene inversa} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

Es decir, en cuanto sepas calcular determinantes podrás saber, de un vistazo, si una matriz tiene inversa o no, sin necesidad de calcularla.

1.2.2 · Determinante de orden 2

Para una matriz 2×2 , el determinante es el producto de la **diagonal principal** menos el producto de la **diagonal secundaria**. Se escribe con barras rectas a los lados (no paréntesis):

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Ejemplo con números:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$$

1.2.3 · Determinante de orden 3: regla de Sarrus

Para una matriz 3×3 se usa la **regla de Sarrus**. Lo vemos paso a paso con esta matriz:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Paso 1. Diagonales principales (de arriba-izquierda a abajo-derecha). Se multiplican y se suman:

1	2	3
0	1	4
5	6	0

$$1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 6 = 0 + 40 + 0 = 40$$

Paso 2. Diagonales secundarias (de arriba-derecha a abajo-izquierda). Se multiplican y se restan:

1	2	3
0	1	4
5	6	0

$$3 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 6 = 15 + 0 + 24 = 39$$

Paso 3. Se restan los dos resultados:

$$|A| = 40 - 39 = 1$$

✓ **Truco.** Es fácil equivocarse con los signos de las secundarias. Para no liarte: primero calcula del todo las tres verdes que suman, luego las tres rojas que restan, y solo al final haz la resta entre ambos totales.

1.2.4 · Desarrollo por adjuntos

La regla de Sarrus solo vale para 3×3 . Para matrices mayores (o para simplificar) se usa el **desarrollo por adjuntos**. Hay que distinguir dos conceptos:

- **Menor** de un elemento: el determinante que queda al eliminar la fila y la columna de ese elemento.
- **Adjunto** de un elemento: ese menor multiplicado por el signo (+ o -) que le corresponde según su posición.

El determinante es entonces la suma de cada elemento de una fila (o columna) multiplicado por su adjunto. Los signos siguen este patrón de tablero de ajedrez:

+	-	+
-	+	-
+	-	+

El signo del lugar (fila i , columna j) es $(-1)^{i+j}$: positivo si $i + j$ es par y negativo si es impar. Si llamamos M_{ij} al menor, el adjunto es:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Ejemplo. Calculamos por adjuntos el mismo determinante de Sarrus, desarrollando por la **primera columna** (1, 0, 5), que tiene un cero. Los signos de esa columna son +, -, +:

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot (...) + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot (0 - 24) - 0 + 5 \cdot (8 - 3) = -24 + 25 = 1$$

Sale lo mismo que por Sarrus, como tiene que ser: da igual la fila o columna que elijas.

Orden 4. Es donde el desarrollo por adjuntos es imprescindible. Se busca una línea con tres ceros (o se fabrican con las propiedades del apartado siguiente) y el determinante baja a uno de orden 3. Aquí la cuarta columna solo tiene un elemento no nulo, el 2 del lugar (4,4), cuyo signo es $(-1)^8 = +$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 13 = 26$$

✓ **Truco.** Elige siempre la fila o columna que tenga más ceros. Cada cero anula un sumando entero, así que desarrollar por la línea con más ceros te ahorra muchísimo cálculo.

1.2.5 · Propiedades de los determinantes

Estas propiedades sirven para las preguntas de teoría y además ahorran cálculos. Las más importantes:

- Una matriz y su **traspuesta** tienen el mismo determinante: $|A^t| = |A|$.
- Si **intercambias dos filas** (o dos columnas), el determinante **cambia de signo**.
- Si una fila o columna es **toda de ceros**, el determinante es **0**.
- Si hay **dos filas (o columnas) iguales o proporcionales**, el determinante es **0**.
- Si una fila (o columna) es **combinación lineal de las demás**, el determinante es **0**. Y al revés: si el determinante es 0, alguna fila es combinación lineal de las otras.
- Si a una fila (o columna) se le **suma otra multiplicada por un número**, el determinante **no cambia**. Es la propiedad que permite fabricar ceros antes de desarrollar por adjuntos.
- Si multiplicas una fila (o columna) por un número k , el determinante queda multiplicado por k .
- El determinante de un **producto** es el producto de los determinantes: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
- El determinante de una **matriz triangular** (o diagonal) es el **producto de los elementos de la diagonal principal**. Muy útil: ahorra todo el cálculo.

Dos consecuencias que conviene tener a mano. Si A es de orden n , $|k \cdot A| = k^n \cdot |A|$, porque multiplicar la matriz entera por k multiplica por k cada una de sus n filas. Y $|A^{-1}| = 1/|A|$, porque $A \cdot A^{-1} = I$ y $|I| = 1$.

✗ Error típico. El determinante no se lleva bien con la suma: en general $|A + B| \neq |A| + |B|$. Y $|2A|$ no es $2 \cdot |A|$: en una matriz de orden 3 es $2^3 \cdot |A| = 8 \cdot |A|$.

1.2.6 · Cálculo de la matriz inversa

Ya sabemos que A tiene inversa solo si $|A| \neq 0$. Cuando existe, se calcula con esta fórmula:

$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot (\text{Adj } A)^t$$

Donde **Adj A** es la matriz de adjuntos (se sustituye cada elemento por su adjunto con su signo) y el superíndice t indica que se traspone. Los pasos son:

1. Calcular $|A|$ y comprobar que es distinto de 0.
2. Calcular la matriz de adjuntos.
3. Trasponerla.
4. Dividir todo entre $|A|$.

✓ Truco. Antes de lanzarte a calcular la inversa, calcula primero el determinante. Si sale 0, ya has terminado: no hay inversa, y te ahorras todo lo demás.

Atajo para orden 2

En una 2×2 los adjuntos son los propios elementos cambiados de sitio, y la fórmula queda en una regla: se **intercambian** los dos elementos de la diagonal principal, se **cambia el signo** a los otros dos y se divide entre el determinante.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = (1 / (ad - bc)) \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ejemplo completo de orden 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Determinante por Sarrus: $(1 \cdot 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1) - (2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 4) = 4 - 3 = 1$. Es distinto de 0, así que hay inversa.

Paso 2. Los nueve adjuntos, cada uno con su signo del tablero:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = +(1 \cdot 4 - 1 \cdot 1) = 3 & A_{12} = -(0 \cdot 4 - 1 \cdot 1) = 1 & A_{13} = +(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1 \\ A_{21} = -(0 \cdot 4 - 2 \cdot 1) = 2 & A_{22} = +(1 \cdot 4 - 2 \cdot 1) = 2 & A_{23} = -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 1) = -1 \\ A_{31} = +(0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = -2 & A_{32} = -(1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = -1 & A_{33} = +(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = 1 \end{array}$$

Pasos 3 y 4. Se traspone la matriz de adjuntos (sus filas pasan a ser columnas) y se divide entre $|A| = 1$:

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación. Multiplicando $A \cdot A^{-1}$ sale la identidad. Por ejemplo, la fila 1 de A por la columna 1 de A^{-1} : $1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 1$; y la fila 3 por la columna 3: $1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 1$. Hacer esta prueba al final cuesta un minuto y caza los fallos de signo.

Otra forma: el método de Gauss-Jordan

Se escribe A y, a su derecha, la identidad. Con las mismas operaciones de filas del método de Gauss (apartado 1.3.3) se convierte la parte izquierda en la identidad; lo que queda a la derecha es A^{-1} . Si en algún momento sale una fila de ceros a la izquierda, A no tiene inversa. Con la matriz del ejercicio 5:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F2 \rightarrow 2F2 - 3F1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{F1 \rightarrow F1 - F2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{F1 \rightarrow F1 / 2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right]$$

A la derecha ha quedado la inversa, la misma que sale con adjuntos en el ejercicio 5. Los dos métodos valen en el examen: el de adjuntos se equivoca menos con parámetros, y el de Gauss-Jordan es más rápido cuando la matriz tiene muchos ceros.

1.2.7 · Rango de una matriz

El **rango** de una matriz es el orden del **mayor menor no nulo** que contiene (un "menor" es el determinante de una submatriz cuadrada). En la práctica, el rango cuenta cuántas filas (o columnas) son **linealmente independientes**, es decir, "realmente distintas" y no combinación de las demás.

Para calcularlo con determinantes: se busca el menor de mayor tamaño posible que no sea cero. Si un determinante de orden 3 es distinto de 0, el rango es 3; si todos los de orden 3 son 0 pero hay uno de orden 2 no nulo, el rango es 2; y así.

Ejemplo visual. Estudiamos el rango de esta matriz 2×3 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Buscamos un menor de orden 2 (un determinante 2×2 dentro de la matriz) que no sea cero. Probamos con las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

Da 0. Y de hecho, la fila 2 es justo el doble de la fila 1 (filas proporcionales), así que todos los menores de orden 2 serán 0. Solo queda un menor de orden 1 no nulo (cualquier elemento distinto de cero, por ejemplo el 1).

Por tanto, $\text{rango}(A) = 1$.

✓ **Truco.** Cuando una matriz cuadrada depende de un parámetro, el rango solo puede bajar en los valores que anulan el determinante: para los demás valores es máximo. Por eso el primer paso es igualar el determinante a cero y estudiar esos casos aparte.

Rango por el método de Gauss

La otra manera, que las comisiones aceptan igual, es **escalonar** la matriz con las operaciones de filas del método de Gauss (apartado 1.3.3), que no cambian el rango. Al final, el rango es el **número de filas que no son todos ceros**.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quedan dos filas no nulas, así que $\text{rango}(A) = 2$. Por determinantes sale lo mismo: $|A| = 0$ (la fila 3 es la suma de las dos primeras) y el menor de las dos primeras filas y columnas vale $1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0$.

1.2.8 · Ecuaciones matriciales

Una **ecuación matricial** es una igualdad entre matrices en la que la incógnita es una matriz X . Se resuelve como una ecuación de números, **despejando X** , con dos diferencias que son justo donde se pierden los puntos:

- **Entre matrices no se divide.** Para quitar una matriz A que multiplica a X se multiplican los dos lados por A^{-1} , y eso solo se puede si A es cuadrada y $|A| \neq 0$.
- **El lado importa.** Como el producto no es conmutativo, A^{-1} se pone **en el mismo lado** en que A está pegada a X , y en los dos miembros de la igualdad.

De $A \cdot X = B$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, es decir, $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$, y queda $X = A^{-1} \cdot B$. Los cuatro casos básicos:

$$\begin{array}{lll} A \cdot X = B & \rightarrow & X = A^{-1} \cdot B \quad (A^{-1} \text{ por la izquierda}) \\ X \cdot A = B & \rightarrow & X = B \cdot A^{-1} \quad (A^{-1} \text{ por la derecha}) \\ A \cdot X \cdot B = C & \rightarrow & X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \\ A \cdot X + B = C & \rightarrow & A \cdot X = C - B \rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B) \end{array}$$

Cuando X aparece dos veces, se juntan los términos con X en un miembro y se saca factor común **por el mismo lado**, escribiendo la identidad I donde en números habría un 1:

$$\begin{array}{lll} A \cdot X + X = B & \rightarrow & (A + I) \cdot X = B \rightarrow X = (A + I)^{-1} \cdot B \\ X \cdot A - X = B & \rightarrow & X \cdot (A - I) = B \rightarrow X = B \cdot (A - I)^{-1} \end{array}$$

X Error típico. Escribir $A \cdot X + X = X \cdot (A + I)$. Falla dos veces: a una matriz no se le suma el número 1, sino la identidad I; y la X estaba a la derecha de A, así que el factor común queda $(A + I) \cdot X$, con la X detrás. Si en una ecuación la X está a la derecha en un término y a la izquierda en otro $(A \cdot X + X \cdot B)$, no se puede sacar factor común: hay que pasar a un sistema.

Dimensiones. Antes de operar conviene saber de qué tamaño es X. Si A es 2×2 y B es 2×3 , en $A \cdot X = B$ la X tiene que ser 2×3 , porque $(2 \times 2) \cdot (2 \times 3)$ da 2×3 .

Ejemplo con la X a la izquierda (inversa por la derecha)

Resolvemos $X \cdot A = B$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$, así que A tiene inversa (se calcula con el atajo de orden 2). Como A está a la derecha de X, se multiplica por A^{-1} por la derecha: $X = B \cdot A^{-1}$.

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Comprobación: se multiplica la X obtenida por A y tiene que salir B.

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = B \text{ (OK)}$$

Si se hubiera multiplicado por el lado equivocado, $A^{-1} \cdot B$, habría salido otra matriz, que no cumple la ecuación:

$$A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \neq X$$

Ejemplo con factor común

Resolvemos $A \cdot X + X = B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La X está a la derecha en los dos términos, así que se saca factor común por la derecha: $(A + I) \cdot X = B$, y $X = (A + I)^{-1} \cdot B$.

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad |A + I| = 1 \rightarrow (A + I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación en la ecuación original:

$$A \cdot X + X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = B \text{ (OK)}$$

Cuando no hay inversa: se pasa a un sistema

Si la matriz que habría que invertir tiene determinante 0 (o no es cuadrada), no se puede despejar. Entonces se escribe X con letras, se hace el producto y se igualan los elementos: sale un **sistema de ecuaciones**, que se resuelve con lo del apartado 1.3. Por ejemplo, $A \cdot X = B$ con:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Aquí $|A| = 4 - 4 = 0$: no hay A^{-1} . El producto da $x + 2y = 3$ y $2x + 4y = 6$, y la segunda ecuación es el doble de la primera. Es un sistema compatible indeterminado: X tiene $x = 3 - 2\lambda$, $y = \lambda$, con λ cualquier número real. Una ecuación matricial sin inversa puede tener infinitas soluciones o ninguna; solo el sistema lo dice.

✓ **Truco.** Orden de trabajo en el examen: (1) despeja X con letras, sin números, cuidando el lado; (2) comprueba que la matriz que vas a invertir tiene determinante distinto de 0; (3) calcula la inversa; (4) haz el producto en el orden que te ha salido al despejar. La comprobación final (sustituir X en la ecuación) es opcional pero caza el error del lado.

Ejercicios

Diez ejercicios de determinantes al estilo de la PAU, resueltos. En **rojo** va la explicación de qué se hace y por qué; en negro, la resolución con los cálculos.

1. Calcula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 14$$

En orden 2, el determinante es el producto de la diagonal principal menos el de la secundaria.

$$|A| = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 20 - 6 = 14$$

Solución: $|A| = 14$.

2. Calcula el determinante de la matriz B por la regla de Sarrus.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Se suman los tres productos de las diagonales principales y se restan los de las secundarias.

$$\text{Principales: } 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 2 = 6 + 0 + 0 = 6$$

$$\text{Secundarias: } 0 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0 + 4 + 1 = 5$$

$$|B| = 6 - 5 = 1$$

Solución: $|B| = 1$.

3. Calcula para qué valores del parámetro a la matriz A tiene determinante nulo.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 4 & a \end{bmatrix}$$

Se calcula el determinante en función de a y se iguala a cero; los valores que salen son los que lo anulan.

$$|A| = a \cdot a - 1 \cdot 4 = a^2 - 4$$

$$a^2 - 4 = 0 \rightarrow a^2 = 4 \rightarrow a = 2 \text{ o } a = -2$$

Solución: El determinante se anula para $a = 2$ y $a = -2$.

4. Determina para qué valores del parámetro k la matriz A tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & k-1 \end{bmatrix}$$

Una matriz tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Calculamos el determinante y vemos qué valores lo anulan (esos son los que NO tienen inversa).

$$|A| = k \cdot (k-1) - 2 \cdot 3 = k^2 - k - 6$$

$$k^2 - k - 6 = 0 \rightarrow k = 3 \text{ o } k = -2$$

Para $k = 3$ y $k = -2$ el determinante es 0, así que en esos casos no hay inversa.

Solución: A tiene inversa para todo k excepto $k = 3$ y $k = -2$.

5. Calcula la matriz inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Primero el determinante (si es 0, no hay inversa). Luego se aplica la fórmula: para una 2×2 se intercambian los elementos de la diagonal principal, se cambia el signo a la secundaria y se divide todo entre el determinante.

$$|A| = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 4 - 3 = 1 \quad (\neq 0, \text{ hay inversa})$$

$$A^{-1} = (1/1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Solución: } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Sabiendo que $|A| = 3$, $|B| = -2$ y que A y B son de orden 3, calcula $|A^t|$, $|A \cdot B|$ y $|2A|$.

Se aplican directamente las propiedades de los determinantes, sin calcular ninguna matriz.

$$|A^t| = |A| = 3 \quad (\text{traspuesta no cambia el determinante})$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = 3 \cdot (-2) = -6$$

Cuidado con $|2A|$: multiplicar TODA la matriz por 2 multiplica cada una de las 3 filas por 2, así que el determinante se multiplica por 2^3 .

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 3 = 24$$

Solución: $|A^t| = 3$, $|A \cdot B| = -6$, $|2A| = 24$.

7. Estudia el rango de la matriz A según los valores del parámetro m.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{bmatrix}$$

El rango depende de si el determinante se anula. Calculamos el determinante e igualamos a cero para hallar el valor crítico.

$$|A| = 1 \cdot m - 2 \cdot 3 = m - 6$$

$$m - 6 = 0 \rightarrow m = 6$$

Si $m \neq 6$, el determinante no es cero, hay un menor de orden 2 no nulo $\rightarrow$ rango 2. Si $m = 6$, el determinante es 0, pero quedan elementos no nulos $\rightarrow$ rango 1.

Solución: Rango 2 si $m \neq 6$; rango 1 si $m = 6$.

8. Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$, siendo A y B conocidas y A con inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se despeja X multiplicando por A^{-1} por la IZQUIERDA (el mismo lado en que A multiplica a X): de $A \cdot X = B$ se pasa a $X = A^{-1} \cdot B$. El lado importa porque el producto no es conmutativo.

$$|A| = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot X$ da $2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$ en la primera fila y $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$ en la segunda, que es B.

$$\text{Solución: } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

9. Calcula el valor de x para que el determinante de la matriz M sea cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 4 \\ 4 & x^2 & 16 \end{vmatrix}$$

Se desarrolla el determinante por Sarrus, se obtiene un polinomio en x, se iguala a cero y se resuelve.

$$\text{Principales: } 1 \cdot x \cdot 16 + 1 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot x^2 = 16x + 16 + 2x^2$$

$$\text{Secundarias: } 1 \cdot x \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 16 + 1 \cdot 4 \cdot x^2 = 4x + 32 + 4x^2$$

$$|M| = (2x^2 + 16x + 16) - (4x^2 + 4x + 32) = -2x^2 + 12x - 16$$

$$-2x^2 + 12x - 16 = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ o } x = 4$$

Se entiende sin cuentas: con $x = 2$ la segunda columna (1, 2, 4) es igual a la primera, y con $x = 4$ la segunda (1, 4, 16) es igual a la tercera. Dos columnas iguales dan determinante 0.

Solución: $x = 2$ y $x = 4$.

10. Dada A, ¿puede saberse si tiene inversa sin calcularla explícitamente? Razónalo y aplícalo a la matriz dada.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sí puede saberse: basta calcular el determinante. Si es distinto de cero, la matriz tiene inversa; si es cero, no la tiene. No hace falta calcular la inversa entera.

$$\begin{aligned} |A| \text{ por Sarrus: } & (1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1) - (2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0) \\ & = (3 + 0 + 0) - (2 + 1 + 0) = 3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

Como el determinante es 0, la matriz NO tiene inversa. La respuesta a la pregunta teórica es: sí se puede saber, mirando solo si el determinante es cero o no. Aquí se ve además por qué: la fila 3 es la suma de las filas 1 y 2.

Solución: Sí se puede saber por el determinante; aquí $|A| = 0$, luego A no tiene inversa.

Siguiente apartado: **1.3 Sistemas de ecuaciones** — discusión por Rouché-Frobenius, método de Gauss y regla de Cramer. Con ejercicios resueltos.

1.3 Sistemas de ecuaciones

Apuntes desarrollados para la PAU. Teoría explicada paso a paso, con ejemplos resueltos. El bloque de Álgebra se divide en tres partes: 1.1 Matrices · 1.2 Determinantes · **1.3 Sistemas**.

1.3.1 · Qué es un sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas que deben cumplirse a la vez. Resolverlo es encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones. Un ejemplo con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Todo sistema se puede escribir en **forma matricial** $A \cdot X = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X la de incógnitas y B la de términos independientes. Esto conecta directamente con lo que vimos en matrices y determinantes.

1.3.2 · Tipos de sistemas

Según el número de soluciones, un sistema puede ser:

- **Compatible determinado (S.C.D.):** tiene una única solución.
- **Compatible indeterminado (S.C.I.):** tiene infinitas soluciones.
- **Incompatible (S.I.):** no tiene solución.

Todo el bloque gira en torno a decidir en cuál de estos tres casos estamos (a eso se le llama **discutir** el sistema) y, si tiene solución, calcularla.

Un sistema es **homogéneo** si todos sus términos independientes son 0. Nunca es incompatible, porque $x = y = z = 0$ (la **solución trivial**) siempre lo cumple. Si tiene tantas ecuaciones como incógnitas, es compatible determinado cuando $|A| \neq 0$ (solo la trivial) y compatible indeterminado cuando $|A| = 0$ (ejercicio 5).

1.3.3 · Método de Gauss

El método de Gauss transforma el sistema en uno **escalonado** (en forma de escalera), mucho más fácil de resolver. Se trabaja con la **matriz ampliada** (coeficientes + términos independientes) y se hacen operaciones entre filas hasta conseguir ceros por debajo de la diagonal.

Las operaciones permitidas son: intercambiar dos filas, multiplicar una fila por un número, y sumar a una fila un múltiplo de otra.

Una vez escalonado, se resuelve de abajo hacia arriba: la última fila da una incógnita directamente, y se va sustituyendo hacia arriba.

Ejemplo resuelto

Resolvemos este sistema por Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$$

Escribimos la **matriz ampliada** (coeficientes y, tras la barra, los términos independientes):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

Paso 1. Hacemos ceros en la primera columna: a la fila 2 le restamos la fila 1 ($F2-F1$), y a la fila 3 le restamos dos veces la fila 1 ($F3-2F1$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right]$$

Paso 2. Hacemos cero bajo la diagonal en la segunda columna: a la fila 3 le sumamos la fila 2 ($F3+F2$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Paso 3. Ya está escalonado. Resolvemos de abajo arriba:

Fila 3: $z = 3$. Fila 2: $y + 2 \cdot 3 = 8 \rightarrow y = 2$. Fila 1: $x + 2 + 3 = 6 \rightarrow x = 1$.

Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Cómo hacer los ceros para que Gauss salga siempre

Aquí va la técnica exacta, paso a paso. Para hacer un cero en una fila, a esa fila le restas la fila de arriba (la del pivote) multiplicada por un **factor**. Y ese factor se calcula siempre igual:

$$\text{factor} = (\text{número de delante que quieres anular}) / (\text{pivote})$$

El **pivote** es el número de la diagonal que estás usando, y el **número de delante** es el elemento que quieres convertir en cero. Al restar la fila del pivote multiplicada por ese factor, el elemento se anula exactamente. Así funciona siempre, sin fracciones a ojo.

Ejemplo visual

Queremos hacer un cero en el primer elemento de la fila 2. El pivote es el 2 (arriba) y el número de delante que hay que anular es el 6 (abajo):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El factor es $6 / 2 = 3$. Así que a la fila 2 le restamos 3 veces la fila 1:

$$F2 \rightarrow F2 - 3 \cdot F1$$

Primer elemento: $6 - 3 \cdot 2 = 0$ (se anula, que es lo que buscábamos)

Resto de la fila: $2 - 3 \cdot 1 = -1$; $1 - 3 \cdot 3 = -8$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos el cero. Se repite el mismo método (factor = número de delante / pivote) para cada elemento que haya que anular, columna por columna, hasta dejar la matriz escalonada.

✓ **Truco.** Si el pivote es 0, el factor no se puede calcular (no se divide entre cero). En ese caso, intercambia esa fila con otra de debajo que tenga un número distinto de cero en esa posición, y sigue. Reordenar filas está permitido y no cambia el sistema.

1.3.4 · Teorema de Rouché-Frobenius

Es la herramienta para **discutir** un sistema (decidir de qué tipo es) sin necesidad de resolverlo. Compara dos rangos: el de la matriz de coeficientes (A) y el de la matriz ampliada (A*), y los relaciona con el número de incógnitas (n).

- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n \rightarrow$ Compatible determinado (solución única).
- Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n \rightarrow$ Compatible indeterminado (infinitas soluciones).
- Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*) \rightarrow$ Incompatible (sin solución).

Como A* es A con una columna más, siempre se cumple $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A^*) \leq \text{rg}(A) + 1$: el rango de la ampliada o es el mismo o es uno más. Y en el caso indeterminado, la solución depende de $n - \text{rg}(A)$ **parámetros** (uno, la solución es una recta; dos, un plano).

✓ **Truco.** La idea en una frase: si los dos rangos coinciden hay solución, y si además igualan al número de incógnitas, esa solución es única. Si no coinciden, no hay solución. Memoriza este esquema: es la base de los ejercicios con parámetro.

1.3.5 · Regla de Cramer

Cuando el sistema es compatible determinado (y la matriz de coeficientes es cuadrada con determinante no nulo), se puede resolver con la **regla de Cramer**. Cada incógnita se calcula como un cociente de determinantes:

$$x_i = |A_i| / |A|$$

donde A_i es la matriz obtenida al sustituir la columna i por la columna de términos independientes, y $|A|$ es el determinante de la matriz de coeficientes.

Cómo se sustituye la columna

Para el sistema $2x + y = 5$, $x - 3y = -1$, la matriz de coeficientes y la columna de términos independientes son:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{términos indep.} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para calcular x , se sustituye la **primera columna** de A por los términos independientes:

$$x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

Para calcular y , se sustituye la **segunda columna** por los términos independientes:

$$y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} / \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

✓ **Truco.** Cramer solo se puede usar si $|A| \neq 0$. Por eso el orden natural de un ejercicio es: primero discutir con Rouché (o con el determinante), y solo cuando confirmas que hay solución única, aplicar Cramer para calcularla.

Cramer también sirve en un sistema **compatible indeterminado**: se quitan las ecuaciones que sobran (las que no entran en el menor que da el rango), las incógnitas que sobran se pasan al otro lado como parámetro (λ) y se aplica la regla al sistema cuadrado que queda.

1.3.6 · Sistemas con parámetro

El sistema depende de una letra (a , k , m ...) y hay que **discutir qué ocurre según su valor**. El método es siempre el mismo:

1. Calcular el determinante de la matriz de coeficientes en función del parámetro.
2. Igualarlo a cero: los valores que lo anulan son los **casos críticos** que hay que estudiar aparte.
3. Para los valores que NO anulan el determinante: sistema compatible determinado (Cramer).
4. Para cada valor crítico: estudiar los rangos con Rouché para ver si es compatible indeterminado o incompatible.

Si el sistema tiene **más ecuaciones que incógnitas**, A no es cuadrada y no tiene determinante; entonces se empieza por la ampliada A^* , que sí lo es. Si $|A^*| \neq 0$, $\text{rg}(A^*)$ es mayor que cualquier rango posible de A y el sistema es incompatible (ejercicio 2).

El método de Gauss también sirve para discutir: se escalona la matriz ampliada dejando el parámetro dentro y se mira la última fila. Eso sí, sin dividir nunca entre una expresión con el parámetro que pueda valer cero (como $a - 1$), porque justo esos valores son los que hay que estudiar aparte. Si queda $0 = 0$, sobra una ecuación (compatible indeterminado); si queda $0 = \text{un número distinto de } 0$, es incompatible.

1.3.7 · Interpretación geométrica de las soluciones

Cada ecuación lineal es un objeto geométrico, y resolver el sistema es buscar los puntos que están en todos a la vez.

Con dos incógnitas: rectas en el plano

Cada ecuación $ax + by = c$ es una recta. Con dos ecuaciones:

- **Compatible determinado:** las rectas se cortan en un punto, que es la solución.
- **Compatible indeterminado:** las dos rectas son la misma; todos sus puntos son solución.
- **Incompatible:** las rectas son paralelas y no tienen ningún punto común (ejercicio 7).

Con tres incógnitas: planos en el espacio

Cada ecuación $ax + by + cz = d$ es un plano. Con tres ecuaciones:

- **$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3$** , compatible determinado: los tres planos se cortan en un único punto.
- **$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$** , compatible indeterminado con un parámetro: los planos tienen en común una recta.
- **$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1$** , compatible indeterminado con dos parámetros: los tres planos son el mismo.
- **$\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$** , incompatible: no hay ningún punto común a los tres. O hay planos paralelos, o se cortan dos a dos en tres rectas paralelas, como las caras de un prisma.

✓ **Truco.** Por eso un sistema con parámetro es también un ejercicio de geometría: discutirlo es decir cómo están colocados los planos. Y al revés, «¿tienen los tres planos algún punto común?» se contesta discutiendo el sistema que forman sus ecuaciones.

Ejercicios

Diez ejercicios de sistemas al estilo de la PAU, resueltos. En **rojo** va la explicación de qué se hace y por qué; en negro, la resolución con los cálculos.

1. Resuelve el siguiente sistema por el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

Se escribe la matriz ampliada y se hacen ceros bajo la diagonal. Conviene dejar arriba la fila que empieza por un número cómodo (aquí el 1 ya va bien).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$F2 - F1$ y $F3 - 2F1$ (ceros en la 1ª columna):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{array} \right]$$

Para no meter fracciones, en vez de $F3 - (1/2)F2$ se hace $2F3 - F2$: multiplicar la fila que se cambia por un número distinto de 0 también está permitido.

$2F3 - F2$ (cero en la 2ª columna):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right]$$

Fila 3: $-7z = -21 \rightarrow z = 3$

Fila 2: $-2y + 3 = -1 \rightarrow y = 2$

Fila 1: $x + 2 + 3 = 6 \rightarrow x = 1$

Comprobación en las ecuaciones originales: $1 + 2 + 3 = 6$; $1 - 2 + 6 = 5$; $2 + 2 - 3 = 1$. Las tres se cumplen.

Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

2. Discute según los valores del parámetro m el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ mx + y = m \\ x + my = 1 \end{cases}$$

Hay 3 ecuaciones y 2 incógnitas: A es 3×2 (sin determinante) y A^* es 3×3 . Se empieza por la ampliada, que es la cuadrada.

$|A^*|$ tiene la 1ª y la 3ª columna iguales, $(1, m, 1) \rightarrow |A^*| = 0$ para todo $m \rightarrow \text{rg}(A^*) \leq 2$

Menor de A con las filas 1 y 2: $1 \cdot 1 - 1 \cdot m = 1 - m \rightarrow$ se anula en $m = 1$

Si $m \neq 1$: $\text{rg}(A) = 2 = \text{rg}(A^*) = n^\circ$ de incógnitas $\rightarrow$ compatible determinado. Restando la 1ª ecuación a la 2ª: $(m - 1)x = m - 1$, luego $x = 1$ e $y = 0$; la 3ª también se cumple ($1 + m \cdot 0 = 1$).

Si $m = 1$: las tres ecuaciones son $x + y = 1 \rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 2 \rightarrow$ compatible indeterminado, con $x = 1 - \lambda$, $y = \lambda$.

Solución: Si $m \neq 1$, S.C.D. con $x = 1$, $y = 0$; si $m = 1$, S.C.I. con $x = 1 - \lambda$, $y = \lambda$.

3. Resuelve por la regla de Cramer el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

Primero el determinante de coeficientes (debe ser $\neq 0$). Luego cada incógnita es un cociente de determinantes.

$$|A| = 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -7$$

$$x = |Ax|/|A| = (5 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1))/(-7) = (-14)/(-7) = 2$$

$$y = |Ay|/|A| = (2 \cdot (-1) - 5 \cdot 1)/(-7) = (-7)/(-7) = 1$$

Solución: $x = 2$, $y = 1$.

4. Determina, según los valores del parámetro a , si el sistema tiene solución, y resuelve los casos compatibles:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

Calculamos el determinante de coeficientes en función de a y lo igualamos a cero para hallar el valor crítico.

$$|A| \text{ por Sarrus} = (2a + 1 + 1) - (2 + 1 + a) = a - 1 \rightarrow \text{se anula en } a = 1$$

Si $a \neq 1$: $|A| \neq 0 \rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \rightarrow$ compatible determinado. Se resuelve restando ecuaciones:

$$2^a - 1^a: y = 1 ; 3^a - 1^a: (a - 1)z = 0 \rightarrow z = 0 \text{ (porque } a \neq 1)$$

$$1^a: x + 1 + 0 = 1 \rightarrow x = 0$$

Si $a = 1$: la 1^a y la 3^a ecuación son idénticas. El menor de las dos primeras filas y columnas vale $1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2 < 3 \rightarrow$ compatible indeterminado, con un parámetro.

$$2^a - 1^a: y = 1 ; \text{ queda } x + z = 0 \rightarrow z = \lambda, x = -\lambda$$

Solución: $a \neq 1$: S.C.D., $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$. $a = 1$: S.C.I., $x = -\lambda$, $y = 1$, $z = \lambda$.

5. Estudia para qué valores de k el sistema homogéneo tiene soluciones distintas de la trivial:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

Un sistema homogéneo siempre es compatible (la solución $x=y=z=0$ siempre vale). Tiene soluciones distintas de la trivial solo si el determinante de coeficientes es cero.

$$|A| \text{ por Sarrus} = (k^2 + 1 + 2) - (k + 1 + 2k) = k^2 - 3k + 2 = (k - 1)(k - 2)$$

Se anula en $k = 1$ y en $k = 2$

Si $k \neq 1$ y $k \neq 2$: $\text{rg}(A) = 3 \rightarrow$ solo la solución trivial. En $k = 1$ y en $k = 2$ el rango baja a 2 (el menor de las filas 1 y 2 con las columnas 1 y 3 vale $1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1 \neq 0$, sea cual sea k) $\rightarrow$ compatible indeterminado, con un parámetro.

$$k = 1: 2^a - 1^a \text{ da } x = 0 ; \text{ queda } y + z = 0 \rightarrow (0, -\lambda, \lambda)$$

$$k = 2: 2^a - 2 \cdot (1^a) \text{ da } -z = 0 \rightarrow z = 0 ; \text{ queda } x + y = 0 \rightarrow (\lambda, -\lambda, 0)$$

Solución: Hay soluciones distintas de la trivial solo si $k = 1$ o $k = 2$.

6. Escribe el sistema en forma matricial $A \cdot X = B$ y resuélvelo usando la inversa:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Se despeja $X = A^{-1} \cdot B$. Primero el determinante (para asegurar que hay inversa) y luego se aplica.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{es decir, } A \cdot X = B$$

$$|A| = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: $x = 1$, $y = 1$.

7. Discute el sistema y comprueba que para cierto valor es incompatible:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = a \end{cases}$$

La segunda ecuación es el doble de la primera en los coeficientes. Comparamos con el término independiente para ver la compatibilidad.

$\text{rg}(A) = 1$ siempre (la fila (2, 2) es el doble de la (1, 1))

Menor de A^* con la 1ª columna y la de términos: $1 \cdot a - 1 \cdot 2 = a - 2$

Si $a = 2$: $\text{rg}(A^*) = 1 = \text{rg}(A) < 2 \rightarrow$ la 2ª ecuación es $2 \cdot (1ª)$, misma recta $\rightarrow$ S.C.I.

Si $a \neq 2$: $\text{rg}(A^*) = 2 \neq \text{rg}(A) = 1 \rightarrow$ incompatible: rectas paralelas

Solución: Si $a = 2$, S.C.I.; si $a \neq 2$, incompatible.

8. Una farmacia vende 3 tipos de champú: normal, con vitaminas y anticasca, a 2€, 3€ y 5€ la unidad respectivamente. Un día se vendieron 40 unidades en total, se recaudaron 150€, y se vendieron 2 unidades más de anticasca que de vitaminas. ¿Cuántas unidades de cada tipo se vendieron?

Se traduce cada frase a una ecuación. Con 3 incógnitas hacen falta 3 condiciones, y el enunciado da justo tres: total de unidades, recaudación, y la relación entre anticasca y vitaminas.

$$\begin{aligned} n + v + a &= 40 && \text{(unidades totales)} \\ 2n + 3v + 5a &= 150 && \text{(recaudación en €)} \\ a &= v + 2 && \text{(2 anticasca más que vitaminas)} \end{aligned}$$

Sustituimos $a = v + 2$ en las dos primeras ecuaciones y resolvemos el sistema que queda en n y v .

$$1ª: n + v + (v+2) = 40 \rightarrow n + 2v = 38$$

$$2ª: 2n + 3v + 5(v+2) = 150 \rightarrow 2n + 8v = 140 \rightarrow n + 4v = 70$$

Restando ambas: $2v = 32 \rightarrow v = 16$; luego $n = 6$; y $a = 18$

Solución: 6 champús normales, 16 con vitaminas y 18 anticaspa.

9. Analiza el rango de la matriz de coeficientes según el parámetro a y deduce el tipo de sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$

En este sistema simétrico se calcula el determinante, que se factoriza, y sus raíces dan los valores críticos.

$$|A| \text{ por Sarrus} = (a^3 + 1 + 1) - (a + a + a) = a^3 - 3a + 2 = (a - 1)^2 \cdot (a + 2)$$

Se anula en $a = 1$ y en $a = -2$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 3 \rightarrow \text{S.C.D.}$ Restando la 2^{a} a la 1^{a} sale $(a - 1)(x - y) = 0$, y restando la 3^{a} a la 2^{a} , $(a - 1)(y - z) = 0$. Como $a \neq 1$, $x = y = z$, y la 1^{a} queda $(a + 2)x = 1$.

$$x = y = z = 1/(a + 2)$$

Si $a = 1$: las tres ecuaciones son $x + y + z = 1 \rightarrow \text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 \rightarrow \text{S.C.I.}$ con dos parámetros: $x = 1 - \lambda - \mu$, $y = \lambda$, $z = \mu$.

Si $a = -2$: el menor de las dos primeras filas y columnas vale $(-2) \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = 3 \neq 0$, así que $\text{rg}(A) = 2$; el menor de A^* con las columnas 1, 2 y la de términos vale $9 \neq 0$, así que $\text{rg}(A^*) = 3 \rightarrow$ incompatible. Se ve también sumando las tres ecuaciones: queda $0 = 3$.

Solución: $a \neq 1$ y $a \neq -2$: S.C.D., $x = y = z = 1/(a + 2)$; $a = 1$: S.C.I.; $a = -2$: incompatible.

10. Se paga una cantidad con monedas de 0,50€, 1€ y 2€. Se usan 30 monedas en total, el importe es de 30€, y el número de monedas de 1€ es igual a la suma de las de 0,50€ y 2€. Plantea el sistema y resuélvelo.

Se traduce cada condición del enunciado a una ecuación: total de monedas, importe total, y la relación entre cantidades.

$$x + y + z = 30 \quad (\text{n}^{\circ} \text{ de monedas})$$

$$0,5x + y + 2z = 30 \quad (\text{importe en €})$$

$$y = x + z \quad (\text{monedas de 1€ = resto})$$

Sustituyendo la tercera en la primera: $(x+z) + (x+z) = 30 \rightarrow x+z = 15$, luego $y = 15$. Con eso y la ecuación del importe se despejan x y z .

$$\text{De } y=15 \text{ y } x+z=15, \text{ con el importe: } 0,5x + 2z = 15 \rightarrow \text{resolviendo } x = 10, z = 5$$

Solución: 10 monedas de 0,50€, 15 de 1€ y 5 de 2€.

Con este apartado se completa el **Bloque 1 - Álgebra** (Matrices, Determinantes y Sistemas). Siguiente bloque: 2. Análisis (Límites, derivadas e integrales).