

1

Álgebra

Tema 1.3 · Cramer, Inecuaciones y Ecuaciones Matriciales

Cálculo de determinantes 2×2 y 3×3 (regla de Sarrus). Resolución de sistemas por la regla de Cramer: determinante principal y determinantes de Cramer. Sistemas de inecuaciones lineales con dos variables: región solución. Regla de Cramer también en sistemas compatibles indeterminados. Ecuaciones matriciales $AX=B$, $XA=B$ y $AXB=C$ mediante la matriz inversa y mediante su transformación en un sistema. Teoría con diagramas y catorce ejercicios resueltos al estilo PAU.

Temas del bloque 1

1.1 Matrices y Determinantes

Operaciones, traspuesta, potencias, determinantes (Sarrus, adjuntos), rango, inversa y ecuaciones matriciales.

1.2 Sistemas y Programación Lineal

Método de Gauss, clasificación por Rouché-Frobenius, sistemas con parámetro, inecuaciones, región factible y función objetivo.

1.3 Cramer, Inecuaciones y Ecuaciones Matriciales (este apunte)

Determinantes, regla de Cramer, sistemas de inecuaciones y ecuaciones matriciales, por la inversa y por un sistema.

Apuntes de preparación para la PAU · 2.º de Bachillerato

Ejemplar de muestra gratuito, igual para todos. Prohibida su venta o redistribución sin permiso escrito del titular.

© 2026 PAUmode. Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial, la distribución, la comunicación pública y la transformación de esta obra sin autorización escrita del titular. El incumplimiento podrá dar lugar a las acciones civiles y penales previstas en la legislación sobre propiedad intelectual.

1.3 Cramer, Inecuaciones y Ecuaciones Matriciales

1.1 Matrices · 1.2 Sistemas y PL · **1.3 Cramer/Inecuaciones** · 2.1 Integrales · 2.2 Derivadas · 2.3 Funciones · 3.1 Probabilidad · 3.2 Distribuciones · 4.1 Inferencia.

1.3.1 · Determinantes de matrices

El **determinante** es un número real asociado a cada matriz cuadrada. Su cálculo es imprescindible para la regla de Cramer y para hallar la matriz inversa. Aquí se ven los de orden 2 (fórmula directa) y los de orden 3 (regla de Sarrus).

Lo que entra depende de la comunidad. No todas piden lo mismo en Mates CCSS. Por ejemplo, los contenidos de Madrid para la convocatoria de 2026 incluyen la regla de Sarrus y la regla de Cramer para sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas; en cambio, la matriz de especificaciones de Castilla y León para la PAU de 2025 no nombra ni los determinantes ni la regla de Cramer. Manda el documento oficial de tu comunidad: consúltalo antes de decidir qué estudiar.

Las matrices se escriben entre corchetes y su determinante entre dos barras verticales: si

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, su determinante es $|A|$, que se escribe con los mismos números entre barras.

Determinante de orden 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Regla de Sarrus para orden 3 (A = fila1·fila2·fila3):

Escribir la matriz y repetir las dos primeras columnas a la derecha.

Suma de diagonales de izq. a der. (positivas): $a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h$

Resta de diagonales de der. a izq. (negativas): $c \cdot e \cdot g + a \cdot f \cdot h + b \cdot d \cdot i$

det(A) = (positivas) - (negativas)

Truco. Para el determinante 3×3 por Sarrus: anota el signo de cada producto antes de sumar, y resta la suma de las negativas entera, entre paréntesis: si las negativas suman -1 , queda (positivas) $- (-1) = (\text{positivas}) + 1$. Cuenta que tienes tres diagonales negativas: la tercera, $b \cdot d \cdot i$, empieza arriba en la última columna repetida. Si el resultado sale raro, revisa primero los signos.

Error típico. Confundir la regla de Sarrus con la expansión por cofactores. Sarrus SOLO funciona para matrices 3×3 . Para órdenes mayores hay que usar cofactores. Para cualquier determinante 3×3 , en cambio, Sarrus siempre es válido.

Regla de Sarrus: cálculo del determinante 3×3

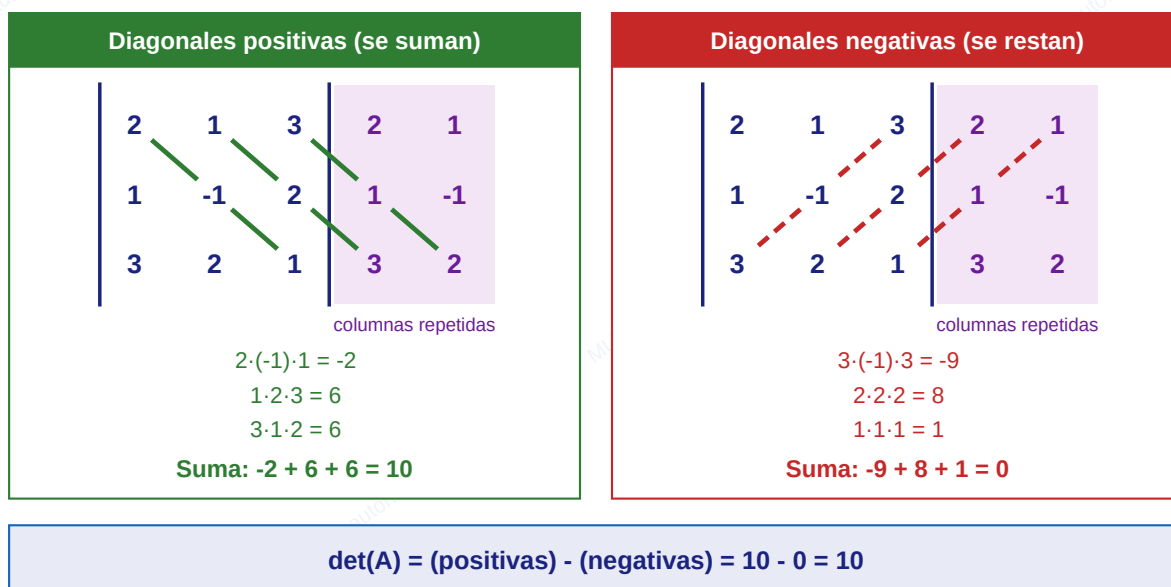


Figura 1 - Regla de Sarrus aplicada a la matriz A del ejercicio 2. Las líneas verdes sólidas son las tres diagonales positivas (suma = $+10$). Las líneas rojas discontinuas son las tres diagonales negativas (suma = 0). $\det(A) = 10 - 0 = 10$. Las dos columnas sombreadas en morado son la repetición auxiliar.

1.3.2 · Regla de Cramer

La **regla de Cramer** permite resolver un sistema lineal cuadrado (mismo número de ecuaciones que de incógnitas) cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero. Cada incógnita se obtiene como el cociente de dos determinantes: el determinante principal D y el determinante D_i obtenido sustituyendo la columna i de A por el vector de términos independientes. Con D distinto de cero el sistema es compatible determinado; si $D = 0$ y el sistema es compatible, Cramer se sigue usando sobre un sistema más pequeño (se explica al final de este apartado).

Regla de Cramer para un sistema 2x2 (ax+by=e, cx+dy=f):

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (\text{det. de la matriz de coeficientes})$$

$$D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - bf \quad | \quad x = D_x / D$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ce \quad | \quad y = D_y / D$$

Si $D = 0$: el sistema es incompatible (S.I.) o indeterminado (S.C.I.).

Aplicar Rouché-Frobenius para determinar cuál de los dos casos es.

Regla de Cramer: fórmulas de resolución

Sistema 2x2	
$ax + by = e$ $cx + dy = f$	
$D =$	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
$D_x =$	$\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = ed - bf \quad x = D_x / D$
$D_y =$	$\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = af - ce \quad y = D_y / D$
e y f ocupan la columna de la incógnita	

Sistema 3x3	
$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$ $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$ $a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$	
$D_x =$	$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
la columna de x se cambia por b	
Dy y Dz: igual, con b en la columna de y o de z	
$x = D_x / D \quad y = D_y / D \quad z = D_z / D$	
D = det(A), el de los coeficientes, sin cambiar nada	

$D \neq 0$
S.C.D.: una sola solución
Cramer directo

$D = 0$ y $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$
S.C.I.: infinitas soluciones
Cramer al sistema reducido,
con un parámetro ($z = t$)

$D = 0$ y $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A^*)$
S.I.: no tiene solución
Cramer no se aplica

Figura 2 - Fórmulas de Cramer. Panel izquierdo: sistema 2x2 con los tres determinantes D, Dx, Dy. Los términos independientes e y f sustituyen la columna de la incógnita que se calcula. Panel derecho: extensión a 3x3. La regla es análoga: se calculan D, Dx, Dy, Dz (cuatro determinantes 3x3). La columna sustituida va en naranja. Abajo, qué hacer según D: con $D = 0$ y el sistema compatible (S.C.I.), Cramer se aplica al sistema reducido con un parámetro.

Cramer vs. Gauss. Cramer es elegante pero costoso cuando el sistema es grande: requiere calcular $n+1$ determinantes de orden n . Para sistemas 2×2 es muy rápido: tres determinantes de orden 2, seis productos. Para sistemas 3×3 también vale, si tu comunidad incluye Cramer. Para sistemas mayores, Gauss es más eficiente. Los dos dan el mismo resultado.

PAU - Atención. En la PAU pueden aparecer sistemas con parámetro resueltos por Cramer. El truco: calcular D en función del parámetro, igualar a cero y analizar ese valor separadamente (puede ser S.C.I. o S.I.). Para los valores del parámetro con D distinto de 0, Cramer da la solución directamente.

Cramer en un sistema compatible indeterminado. La regla también sirve cuando $D = 0$, siempre que el sistema sea compatible: se aplica a un sistema más pequeño que sí tiene determinante distinto de cero. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = r$ y r es menor que el número de incógnitas, se procede así:

Cramer en un sistema compatible indeterminado (S.C.I.):

- 1) Busca en A un menor de orden r distinto de 0.
- 2) Quédate con las r ecuaciones que forman ese menor;
las demás son combinación de ellas y no aportan nada.
- 3) Las incógnitas que no están en el menor pasan al segundo miembro como parámetros (por ejemplo, $z = t$).
- 4) Aplica Cramer al sistema $r \times r$ que queda: ahora los términos independientes llevan la t dentro.

Error típico. Aplicar Cramer al sistema entero cuando $D = 0$: se acaba dividiendo entre cero. Otro fallo es quedarse con dos ecuaciones cualesquiera sin comprobar que el menor que forman es distinto de 0: si ese menor vale 0, el sistema pequeño tampoco tiene determinante distinto de cero y Cramer vuelve a fallar.

1.3.3 · Sistemas de inecuaciones lineales

Un **sistema de inecuaciones lineales** con dos variables define una **región del plano** como intersección de semiplanos. Cada inecuación $ax + by \leq c$ ($\geq, <, >$) delimita un semiplano cuya

frontera es la recta $ax + by = c$. La región solución es el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen simultáneamente todas las inecuaciones.

Procedimiento para representar un sistema de inecuaciones:

1) Para cada inecuación $ax + by \leq c$:

a) Traza la recta frontera: $ax + by = c$ (usa $x=0$ e $y=0$ para dos puntos)

b) Determina el semiplano válido sustituyendo $(0,0)$:

- Si $0 \leq c$ (cierto) $\Rightarrow$ el semiplano incluye el origen
- Si $0 > c$ (falso) $\Rightarrow$ el semiplano NO incluye el origen

c) Sombrea el semiplano correcto

2) La región solución = intersección de todos los semiplanos

3) Calcula los vértices (intersecciones de pares de rectas frontera)

4) Descarta los vértices que no cumplan todas las restricciones

Truco. Siempre incluye las restricciones de no negatividad $x \geq 0$ e $y \geq 0$ si el problema lo exige (producción, economía). Limitan la región al primer cuadrante y reducen el número de vértices a calcular. Un problema de producción nunca puede tener x o y negativas.

Error típico. Sombrear el semiplano equivocado (el que no cumple la inecuación). Comprueba siempre con un punto concreto, preferiblemente el origen $(0,0)$ salvo que el origen esté en la recta frontera. Si el origen está en la recta, usa el punto $(1,0)$ o $(0,1)$ como test.

1.3.4 · Ecuaciones matriciales

Una **ecuación matricial** es una igualdad entre matrices donde la incógnita es una matriz X . Los dos tipos básicos son $AX = B$ y $XA = B$, donde A y B son matrices conocidas. Hay dos formas de resolverlas: despejando X con la **matriz inversa** y transformando la ecuación en un **sistema de ecuaciones lineales**. La primera se basa en multiplicar por A^{-1} en el lado correcto, aprovechando que $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

Tipos de ecuaciones matriciales y su resolución:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \text{ (} A^{-1} \text{ por la izquierda)}$$

$$XA = B \Rightarrow XA \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1} \text{ (} A^{-1} \text{ por la derecha)}$$

$$AXB = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \text{ (} A^{-1} \text{ a la izquierda, } B^{-1} \text{ a la derecha)}$$

Si X aparece en varios términos, se agrupa antes de despejar:

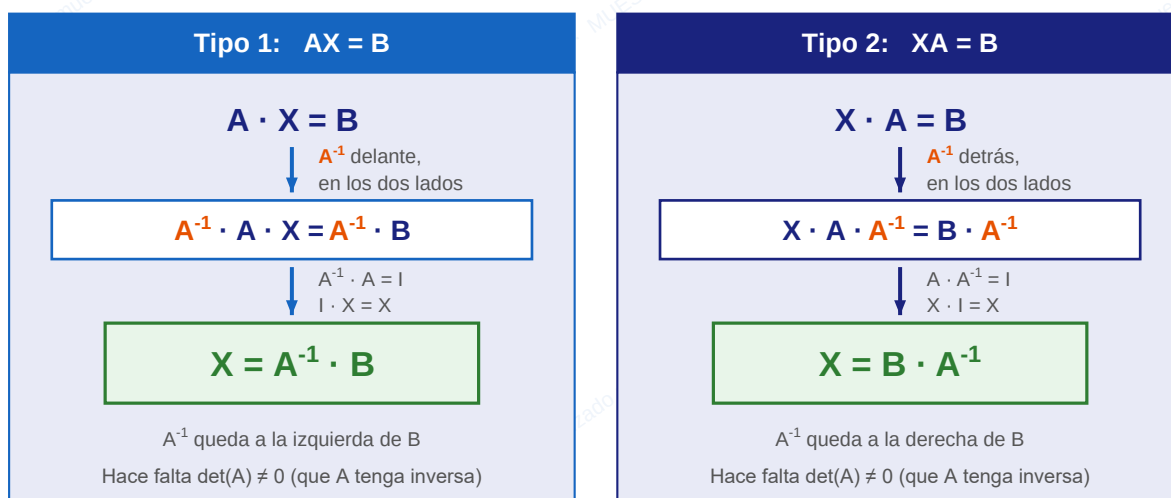
$$AX + X = B \Rightarrow (A + I) \cdot X = B \Rightarrow X = (A + I)^{-1} \cdot B$$

$$XA - 2X = B \Rightarrow X \cdot (A - 2I) = B \Rightarrow X = B \cdot (A - 2I)^{-1}$$

Recordatorio: para A de orden 2 con $\det(A)$ distinto de 0:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = (1/\det(A)) \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ecuaciones matriciales: tipos y resolución



El orden importa: $A \cdot B \neq B \cdot A$ en general, y por eso A^{-1} no se puede cambiar de lado

Figura 3 - Resolución de ecuaciones matriciales. Tipo 1 ($AX=B$): se multiplica por A^{-1} a la izquierda en ambos lados, obteniendo $X = A^{-1}B$. Tipo 2 ($XA=B$): se multiplica por A^{-1} a la derecha, obteniendo $X = BA^{-1}$. El orden del producto no es intercambiable. En naranja, la A^{-1} que se añade en cada paso.

Condición de existencia. La ecuación $AX = B$ tiene solución única cuando $\det(A)$ es distinto de 0. Si $\det(A) = 0$, la matriz A no tiene inversa y la ecuación puede no tener solución o tener infinitas, según B : no se puede despejar y hay que pasar a un sistema. Por eso, antes de despejar, se comprueba que el determinante no vale 0. A veces el propio examen lo pregunta en un apartado anterior: para qué valores de un parámetro la matriz tiene inversa.

Error típico. Multiplicar por A^{-1} en el lado incorrecto. En $AX = B$: A^{-1} va a la izquierda de ambos lados. En $XA = B$: A^{-1} va a la derecha de ambos lados. Si se pone A^{-1} en el lado equivocado, el producto no cancela A y la solución es incorrecta.

Error típico. Escribir $(A + 1) \cdot X$ en lugar de $(A + I) \cdot X$. A una matriz no se le puede sumar un número: $X = I \cdot X$, así que al sacar X factor común queda la identidad. Y el orden importa: $AX + X = (A + I) \cdot X$, con X a la derecha; $XA + X = X \cdot (A + I)$, con X a la izquierda; en $AX + XB$ no se puede sacar factor común.

Resolución mediante un sistema. Cuando la matriz que acompaña a X no tiene inversa, o cuando X aparece a los dos lados multiplicada en distinto orden (por ejemplo, $AX = XA$), no se puede despejar. Entonces se escribe X con sus elementos como incógnitas, se hacen los productos y se igualan los elementos que ocupan la misma posición: cada posición da una ecuación.

Ecuación matricial transformada en sistema (X de orden 2):

1) Escribe $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$: cuatro incógnitas.

2) Haz los productos de los dos miembros.

3) Iguala elemento a elemento: cuatro ecuaciones lineales.

4) Resuelve el sistema (Gauss o Cramer) y reconstruye X .

Si es compatible indeterminado, hay infinitas matrices X .

Ejercicios - Sección 1.3

Catorce ejercicios de determinantes, regla de Cramer (también en un sistema compatible indeterminado y en un problema con contexto), inecuaciones y ecuaciones matriciales, por la inversa y por un sistema, al estilo PAU. En rojo el método aplicado; en azul oscuro los cálculos paso a paso.

1. Calcula el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Determinante 2x2: fórmula directa $ad - bc$. Ejercicio de calentamiento para fijar la fórmula básica.

Aplicamos la fórmula $\det(A) = ad - bc$:

$$\det(A) = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 12 - (-2) = 12 + 2 = 14$$

Atención al signo: $(-1) \cdot 2 = -2$, y al restar (-2) se suma: $12 + 2 = 14$. Un error típico es escribir $12 - 2 = 10$ en lugar de $12 + 2 = 14$.

Resultado: $\det(A) = 14$

2. Calcula el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ usando la regla de Sarrus.

Determinante 3x3 por Sarrus: repetir las dos primeras columnas y calcular la suma de diagonales positivas menos diagonales negativas.

Escribimos la matriz y repetimos las primeras dos columnas:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Diagonales positivas (izq. a der.):

$$P1 = 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2$$

$$P2 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = +6$$

$$P3 = 3 \cdot 1 \cdot 2 = +6$$

$$\text{Suma positivos} = -2 + 6 + 6 = +10$$

Diagonales negativas (der. a izq.):

$$N1 = 3 \cdot (-1) \cdot 3 = -9$$

$$N2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = +8$$

$$N3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = +1$$

$$\text{Suma negativos} = -9 + 8 + 1 = 0$$

$$\det(A) = (+10) - (0) = 10$$

Resultado: $\det(A) = 10$

3. Resuelve el sistema por la regla de Cramer: $3x + 2y = 8 \mid x + y = 3$.

Sistema 2×2 compatible determinado (D distinto de 0): calcular D , D_x y D_y , luego dividir.

Calculamos el determinante principal D :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

Determinante D_x (columna x sustituida por términos independientes):

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2$$

$$x = D_x / D = 2 / 1 = 2$$

Determinante D_y (columna y sustituida por términos independientes):

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - 8 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

$$y = D_y / D = 1 / 1 = 1$$

Verificación: $3(2) + 2(1) = 8$ (OK) · $2 + 1 = 3$ (OK).

Resultado: $x = 2$, $y = 1$

4. Resuelve el sistema 3x3 por la regla de Cramer: $x + y + z = 6$ | $2x - y + z = 3$ | $x + 2y - z = 2$.

Sistema 3x3: calcular D y los tres determinantes de Cramer Dx, Dy, Dz. Cada uno requiere calcular un determinante 3x3 por Sarrus.

Determinante principal D de la matriz de coeficientes, por Sarrus:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Positivas: $1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = 1 + 1 + 4 = 6$

Negativas: $1 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) = -1 + 2 - 2 = -1$

D = 6 - (-1) = 7

$D = 7$ es distinto de 0: el sistema es compatible determinado y se puede aplicar Cramer.

Dx: sustituimos la columna de x por los términos independientes (6, 3, 2):

$$Dx = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Positivas: $6 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6 + 2 + 6 = 14$

Negativas: $1 \cdot (-1) \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1) = -2 + 12 - 3 = 7$

Dx = 14 - 7 = 7 $\Rightarrow x = 7/7 = 1$

Dy: sustituimos la columna de y por (6, 3, 2):

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Positivas: $1 \cdot 3 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = -3 + 6 + 4 = 7$

Negativas: $1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 6 \cdot 2 \cdot (-1) = 3 + 2 - 12 = -7$

Dy = 7 - (-7) = 14 $\Rightarrow y = 14/7 = 2$

Dz: sustituimos la columna de z por (6, 3, 2):

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Positivas: $1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \cdot 2 = -2 + 3 + 24 = 25$

Negativas: $6 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 = -6 + 6 + 4 = 4$

$$Dz = 25 - 4 = 21 \Rightarrow z = 21/7 = 3$$

Verificación: $1+2+3=6$ (OK) · $2-2+3=3$ (OK) · $1+4-3=2$ (OK).

Resultado: $x = 1, y = 2, z = 3$

5. Estudia el sistema según el parámetro a: $ax + y = 2 \mid x + ay = 2$.

Sistema con parámetro: calcular $D(a)$, ver cuándo es cero y analizar cada caso por separado.

Calculamos D en función de a:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a \cdot a - 1 \cdot 1 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

Caso a distinto de 1 y a distinto de -1: D distinto de 0 $\Rightarrow$ S.C.D.

$$Dx = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 2a - 2 = 2(a-1) \Rightarrow x = 2(a-1) / (a-1)(a+1) = 2/(a+1)$$

$$Dy = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 2 = 2(a-1) \Rightarrow y = 2(a-1) / (a-1)(a+1) = 2/(a+1)$$

Solución única: $x = y = 2/(a+1)$

Caso a = 1: las dos ecuaciones son $x+y=2$ (idénticas) $\Rightarrow$ S.C.I.

Solución: $x = t, y = 2 - t$ (t parámetro libre)

Caso a = -1: sistema $-x+y=2$ y $x-y=2$. Sumando: $0 = 4 \Rightarrow$ S.I.

Para a = -1 las dos rectas son paralelas: los coeficientes de x e y son proporcionales (-1, 1 frente a 1, -1) y los términos independientes no (2 y 2).

Resultado: a=1: S.C.I., (t, 2-t). a=-1: S.I. a distinto de +/-1: S.C.D., $x=y=2/(a+1)$

6. Representa la región definida por las inecuaciones: $x + y \leq 5 \mid 2x + y \leq 8 \mid x \geq 0 \mid y \geq 0$.

Halla los vértices y maximiza $Z = 2x + 3y$.

Sistema de inecuaciones + optimización: primero la región, luego evaluar la función objetivo en cada vértice.

Rectas frontera y semiplanos válidos (test con origen):

$x+y=5$: en (0,0) da $0 \leq 5$ (cierto) $\Rightarrow$ semiplano que incluye el origen

$2x+y=8$: en $(0,0)$ da $0 \leq 8$ (cierto) $\Rightarrow$ semiplano que incluye el origen

Vértices de la región (intersecciones de rectas frontera):

$y=0$ y $x=0$: $(0, 0)$ — vértice en el origen

$2x+y=8$ y $y=0$: $x=4 \Rightarrow (4, 0)$ — verificar: $4+0=4 \leq 5$ (OK)

$x+y=5$ y $x=0$: $y=5 \Rightarrow (0, 5)$ — verificar: $0+5=5 \leq 8$ (OK)

$x+y=5$ y $2x+y=8$: restando $x=3$, luego $y=2 \Rightarrow (3, 2)$

Verificación $(3,2)$: $3+2=5 \leq 5$ (OK) y $6+2=8 \leq 8$ (OK)

Evaluamos $Z = 2x + 3y$ en los cuatro vértices:

$$Z(0, 0) = 0$$

$$Z(4, 0) = 8$$

$$Z(3, 2) = 6 + 6 = 12$$

$$Z(0, 5) = 0 + 15 = 15 \leftarrow \text{máximo}$$

Resultado: Vértices: $(0,0)$, $(4,0)$, $(3,2)$, $(0,5)$. Máximo $Z = 15$ en el punto $(0, 5)$

7. Resuelve la ecuación matricial $AX = B$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Ecuación matricial tipo $AX=B$: calcular A inversa y multiplicar por la izquierda. $X = A^{-1} \cdot B$.

Calculamos $\det(A)$:

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

Calculamos A inversa:

$$A^{-1} = (1/(-2)) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Aplicamos $X = A^{-1} \cdot B$:

$$x = -2 \cdot 5 + 1 \cdot 11 = -10 + 11 = 1$$

$$y = (3/2) \cdot 5 + (-1/2) \cdot 11 = 15/2 - 11/2 = 4/2 = 2$$

Verificación: fila 1: $1+4=5$ (OK) · fila 2: $3+8=11$ (OK).

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, es decir $x = 1$, $y = 2$

8. Resuelve la ecuación matricial $XA = B$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ecuación matricial tipo $XA=B$: calcular A inversa y multiplicar por la derecha. $X = B \cdot A^{-1}$.

Calculamos $\det(A)$:

$$\det(A) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$$

Calculamos A inversa ($\det=1$, así que es sencillo):

$$A^{-1} = (1/1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicamos $X = B \cdot A^{-1}$:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Fila 1: } (2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1) = (2, 1)$$

$$\text{Fila 2: } (1 \cdot 1 + 2 \cdot 0, 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1) = (1, 1)$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificación $XA = B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 2+1 \\ 1+0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = B \text{ (OK)}$$

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Resuelve la ecuación matricial $AXB = C$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ecuación matricial tipo $AXB=C$: multiplicar por A^{-1} a la izquierda y por B^{-1} a la derecha. $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Calculamos A inversa:

$$\det(A) = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos B inversa:

$$\det(B) = 1 \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 1: calculamos $A^{-1} \cdot C$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2+1 & -3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: $X = (A^{-1}C) \cdot B^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & -2+3 \\ -1+0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificación $AXB = C$:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AXB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 2+1 \\ 1+0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = C \text{ (OK)}$$

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

10. Resuelve el sistema $2x + y = 7$, $x + 3y = 11$ por la regla de Cramer y después escríbelo como ecuación matricial $AX = B$ y obtén la misma solución mediante $X = A^{-1}B$.

Ejercicio integrador: conectar la regla de Cramer con la ecuación matricial para ver que ambos métodos son equivalentes.

Resolución por Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 11 = 10 \Rightarrow x = 10/5 = 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 22 - 7 = 15 \Rightarrow y = 15/5 = 3$$

Verificación: $2(2)+3=7$ (OK) · $2+9=11$ (OK)

Resolución como ecuación matricial $AX = B$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 5$$

$$A^{-1} = (1/5) \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = (1/5)(3 \cdot 7 + (-1) \cdot 11) = (1/5)(21 - 11) = 10/5 = 2$$

$$y = (1/5)((-1) \cdot 7 + 2 \cdot 11) = (1/5)(-7 + 22) = 15/5 = 3$$

Ambos métodos dan el mismo resultado, y no es casualidad. La inversa lleva dentro el factor $1/\det(A) = 1/D$, y los paréntesis de cada fila valen justo $10 = D_x$ y $15 = D_y$. Por eso $x = D_x/D$ e $y = D_y/D$ salen igual por los dos caminos.

Resultado: $x = 2$, $y = 3$ (por Cramer y por ecuación matricial)

11. Resuelve por la regla de Cramer el sistema $x + y + z = 6 \mid x - y + 2z = 5 \mid 2x + 3z = 11$.

Si $D = 0$ no se abandona Cramer: se estudian los rangos y, si el sistema es compatible indeterminado, se aplica Cramer a un sistema más pequeño con un parámetro.

Determinante de la matriz de coeficientes, por Sarrus:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Positivas: } 1 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 = -3 + 4 + 0 = 1$$

$$\text{Negativas: } 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 3 = -2 + 0 + 3 = 1$$

$$D = 1 - 1 = 0$$

$D = 0$: el sistema no es compatible determinado. Hay que ver si es compatible indeterminado o incompatible.

Rangos. El menor de las dos primeras filas y columnas no es nulo:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2, \text{ distinto de } 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

La tercera ecuación es la suma de las dos primeras, términos independientes incluidos:

$$(1+1)x + (1-1)y + (1+2)z = 6 + 5 \Rightarrow 2x + 3z = 11$$

$$\text{rango}(A^*) = 2 = \text{rango}(A), \text{ menor que } 3 \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

Nos quedamos con las dos ecuaciones del menor y pasamos $z = t$ al segundo miembro:

$$x + y = 6 - t$$

$$x - y = 5 - 2t$$

Cramer en este sistema 2×2 , cuyo determinante es el menor $M = -2$:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6-t & 1 \\ 5-2t & -1 \end{vmatrix} = -(6-t) - (5-2t) = 3t - 11 \Rightarrow x = (3t - 11)/(-2) = (11 - 3t)/2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 6-t \\ 1 & 5-2t \end{vmatrix} = (5-2t) - (6-t) = -1 - t \Rightarrow y = (-1 - t)/(-2) = (1 + t)/2$$

Comprobación con $t = 1$: $x = 4$, $y = 1$, $z = 1$. Ecuaciones: $4+1+1=6$ (OK) · $4-1+2=5$ (OK) · $8+3=11$ (OK).

Resultado: S.C.I.: $x = (11 - 3t)/2$, $y = (1 + t)/2$, $z = t$, con t cualquier número real

12. Una papelería vende bolígrafos, cuadernos y carpetas. Un cliente paga 11 euros por 3 bolígrafos, 2 cuadernos y 1 carpeta; otro paga 15 euros por 1 bolígrafo, 3 cuadernos y 2 carpetas. Además, una carpeta cuesta el doble que un cuaderno. Plantea un sistema de ecuaciones y halla el precio de cada artículo.

Problema con contexto: lo primero que puntúa es el planteamiento. Se nombran las incógnitas, cada dato del enunciado da una ecuación y el sistema, cuadrado y con D distinto de 0, se resuelve por Cramer.

Incógnitas: x = precio de un bolígrafo, y = precio de un cuaderno, z = precio de una carpeta, en euros.

Cada dato del enunciado es una ecuación:

$$3x + 2y + z = 11 \text{ (primer cliente)}$$

$$x + 3y + 2z = 15 \text{ (segundo cliente)}$$

$$z = 2y \Rightarrow -2y + z = 0 \text{ (la carpeta cuesta el doble que el cuaderno)}$$

Determinante principal, por Sarrus:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{Positivas: } 3 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 + 0 - 2 = 7$$

$$\text{Negativas: } 1 \cdot 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 0 - 12 + 2 = -10$$

$$D = 7 - (-10) = 17, \text{ distinto de } 0 \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

Determinantes de Cramer (positivas menos negativas):

$$D_x = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 15 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (33 + 0 - 30) - (0 - 44 + 30) = 3 + 14 = 17 \Rightarrow x = 17/17 = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 11 & 1 \\ 1 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (45 + 0 + 0) - (0 + 0 + 11) = 34 \Rightarrow y = 34/17 = 2$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 15 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 + 0 - 22) - (0 - 90 + 0) = 68 \Rightarrow z = 68/17 = 4$$

Comprobación: $3 + 4 + 4 = 11$ (OK) · $1 + 6 + 8 = 15$ (OK) · $4 = 2 \cdot 2$ (OK). La respuesta se da en el contexto del problema, con sus unidades.

Resultado: Bolígrafo: 1 euro; cuaderno: 2 euros; carpeta: 4 euros

13. Resuelve la ecuación matricial $AX + X = B$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$.

X aparece dos veces: primero se saca factor común, con la identidad, y después se despeja con la inversa por la izquierda.

Sacamos X factor común por la derecha. Como $X = I \cdot X$:

$$AX + X = AX + IX = (A + I) \cdot X = B \Rightarrow X = (A + I)^{-1} \cdot B$$

Calculamos $A + I$ y su determinante:

$$A + I = \begin{bmatrix} 1+1 & 2 \\ 0 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det(A + I) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 4$$

$$(A + I)^{-1} = (1/4) \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos por la izquierda:

$$X = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Fila 1: } ((1/2) \cdot 4 - (1/2) \cdot 2, (1/2) \cdot 2 - (1/2) \cdot 6) = (2 - 1, 1 - 3) = (1, -2)$$

$$\text{Fila 2: } (0 \cdot 4 + (1/2) \cdot 2, 0 \cdot 2 + (1/2) \cdot 6) = (1, 3)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Verificación $AX + X = B$:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & -2+6 \\ 0+1 & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AX + X = \begin{bmatrix} 3+1 & 4-2 \\ 1+1 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = B \text{ (OK)}$$

$$\text{Resultado: } X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

14. Halla todas las matrices X de orden 2 que cumplen $AX = XA$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

X aparece a los dos lados y multiplicada en distinto orden: no se puede despejar con la inversa. Se transforma la ecuación en un sistema igualando elemento a elemento.

Escribimos la incógnita con cuatro elementos: $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2z & y+2t \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 2x+y \\ z & 2z+t \end{bmatrix}$$

Igualamos los elementos que ocupan la misma posición:

Fila 1, columna 1: $x + 2z = x \Rightarrow z = 0$

Fila 1, columna 2: $y + 2t = 2x + y \Rightarrow t = x$

Fila 2, columna 1: $z = z$ (no aporta nada)

Fila 2, columna 2: $t = 2z + t \Rightarrow z = 0$

Quedan dos condiciones, $z = 0$ y $t = x$, para cuatro incógnitas: el sistema es compatible indeterminado y x e y quedan libres.

Comprobación con $x = 1$, $y = 3$, es decir, $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{OK, son iguales})$$

Resultado: $X = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$, con x e y números reales cualesquiera (infinitas matrices)

Fin del Bloque 1 — Álgebra. Siguierte sección: **2.1 Integrales y Áreas**, que abre el Bloque 2 — Análisis: primitivas inmediatas simples y compuestas, integral definida, Regla de Barrow y áreas entre curvas.