

1

Álgebra

Tema 1.2 · Sistemas y Programación Lineal

Sistemas de ecuaciones lineales y su clasificación (compatible determinado, indeterminado e incompatible) mediante el método de Gauss y el Teorema de Rouché-Frobenius. Discusión de sistemas con parámetro. Programación lineal: inecuaciones, región factible, vértices y función objetivo. Teoría con diagramas y diez ejercicios resueltos al estilo PAU.

Temas del bloque 1

1.1 Matrices y Determinantes

Operaciones, traspuesta, potencias, determinantes (Sarrus, adjuntos), rango, inversa y ecuaciones matriciales.

1.2 Sistemas y Programación Lineal (este apunte)

Método de Gauss, clasificación por Rouché-Frobenius, sistemas con parámetro, inecuaciones, región factible y función objetivo.

1.3 Cramer, Inecuaciones y Ecuaciones Matriciales

Determinantes, regla de Cramer, sistemas de inecuaciones y ecuaciones matriciales, por la inversa y por un sistema.

Apuntes de preparación para la PAU · 2.º de Bachillerato

Ejemplar de muestra gratuito, igual para todos. Prohibida su venta o redistribución sin permiso escrito del titular.

© 2026 PAUmode. Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial, la distribución, la comunicación pública y la transformación de esta obra sin autorización escrita del titular. El incumplimiento podrá dar lugar a las acciones civiles y penales previstas en la legislación sobre propiedad intelectual.

1.2 Sistemas y Programación Lineal

1.1 Matrices · **1.2 Sistemas y PL** · 1.3 Cramer/Inecuaciones · 2.1 Integrales · 2.2 Derivadas · 2.3 Funciones · 3.1 Probabilidad · 3.2 Distribuciones · 4.1 Inferencia.

1.2.1 · Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones de primer grado con las mismas incógnitas. En la PAU de Mates CCSS aparecen sistemas 2×2 (dos ecuaciones, dos incógnitas) y 3×3 (tres ecuaciones, tres incógnitas). El método universal de resolución es la **eliminación gaussiana**.

Método de Gauss (eliminación por filas):

1) Escribir la matriz ampliada $(A|b)$ del sistema

2) Aplicar operaciones elementales de fila:

- Intercambiar dos filas: $F_i \leftrightarrow F_j$
- Multiplicar una fila por k distinto de 0: $F_i \leftarrow k \cdot F_i$
- Sumar a una fila un múltiplo de otra: $F_i \leftarrow F_i + k \cdot F_j$

3) Llevar la matriz a forma escalonada (triangular superior)

4) Resolver por sustitución hacia atrás (de abajo hacia arriba)

Truco. Antes de empezar Gauss, coloca como primera fila la que tiene coeficiente 1 en la primera incógnita. Así los pivotes son enteros y evitas fracciones en los pasos intermedios, que es donde es más fácil equivocarse en las cuentas.

Error típico. Olvidar aplicar la operación de fila al término independiente (última columna). La operación $F_i \leftarrow F_i + k \cdot F_j$ afecta a TODOS los elementos de la fila, incluido el término independiente. Si sólo se transforma la parte izquierda, el sistema resultante es incorrecto.

Método de Gauss sobre la matriz ampliada (Ejercicio 1)

Matriz ampliada		Ceros en la columna 1		Cero en la columna 2
$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right)$	$\begin{array}{l} \text{F2} - 2\text{F1} \\ \text{F3} - \text{F1} \end{array}$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right)$	$3\text{F3} + \text{F2}$	$\left(\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right)$

Hacia atrás: $-7z = -21 \Rightarrow z = 3$ $-3y - 3 = -9 \Rightarrow y = 2$ $x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$

Comprobación: $1+2+3 = 6$ (OK) $2-2+3 = 3$ (OK) $1+4-3 = 2$ (OK)

■ Fila que acaba de cambiar

■ Fila que ya da z

Cada operación de fila da un sistema equivalente: las soluciones no cambian

Figura 1 - Proceso de eliminación gaussiana sobre el sistema del Ejercicio 1. Cada flecha representa una operación de fila. La última fila escalonada despeja directamente $z = 3$. Luego se sustituye hacia atrás para obtener $y = 2$ y $x = 1$.

Plantear el sistema a partir de un enunciado. En el examen el sistema puede no venir escrito, sino contado con palabras (precios, cantidades, edades, mezclas) y hay que traducirlo. El currículo lo pide así: «Sistemas de ecuaciones: modelización de situaciones en diversos contextos».

Cómo plantear un sistema con contexto:

1) Nombrar las incógnitas diciendo qué son: x = número de camisetas del modelo A...

2) Cada frase con un dato numérico es una ecuación

3) Traducir las frases típicas:

- «entre los tres suman 60» $\Rightarrow x + y + z = 60$
- «A es el doble de B» $\Rightarrow x = 2y$
- «A tiene 5 más que B» $\Rightarrow x = y + 5$
- «tantos de A como de B y C juntos» $\Rightarrow x = y + z$

4) Resolver por Gauss y comprobar la solución en el enunciado, no en las ecuaciones

Error típico. Comprobar la solución solo en las ecuaciones que uno mismo ha escrito. Si el planteamiento está mal, la solución cumple unas ecuaciones equivocadas y la comprobación sale bien igualmente. Hay que volver a leer cada frase del enunciado con los números obtenidos (Ejercicio 10).

1.2.2 · Clasificación de sistemas: Rouché-Frobenius

El **Teorema de Rouché-Frobenius** clasifica cualquier sistema lineal comparando el rango de la matriz de coeficientes A con el rango de la matriz ampliada A^* . El rango es el número máximo de filas linealmente independientes (equivalente: el orden del mayor menor no nulo).

Teorema de Rouché-Frobenius (n = número de incógnitas):

Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*) \Rightarrow$ Sistema Incompatible (S.I.) — sin solución

Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = n \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (S.C.D.) — solución única

Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) < n \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.) — infinitas soluciones

(con $n - \text{rg}(A)$ parámetros libres)

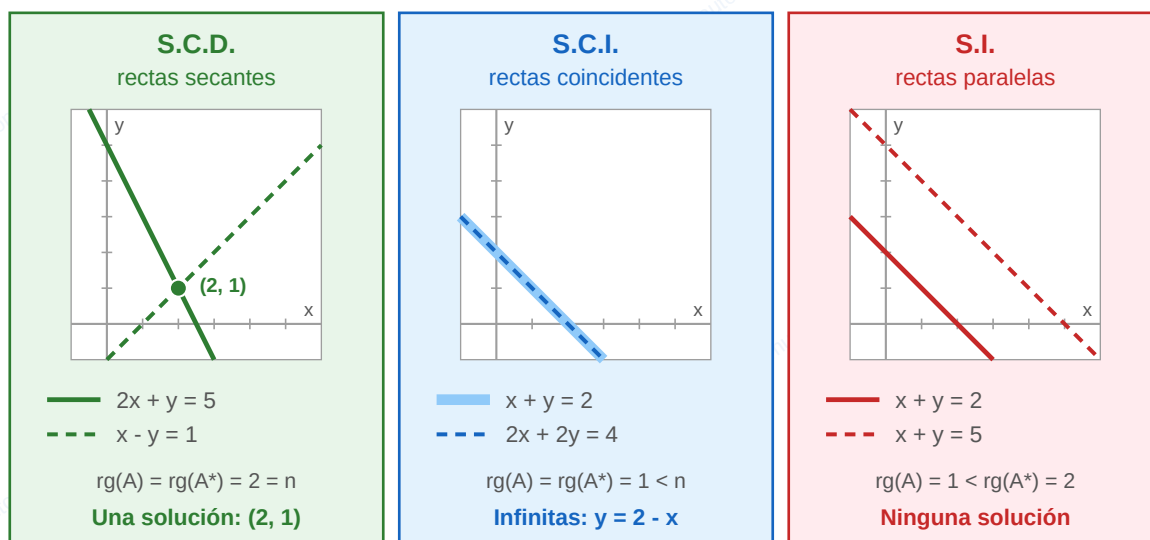
Cuando hay un parámetro a , el rango cambia al anular determinantes.

Busca el valor de a que hace nula una fila de la matriz escalonada.

Sistemas con parámetro. Cuando el sistema depende de un parámetro (llamémoslo a , k o m), aplica Gauss simbólicamente. En alguna fila aparecerá un coeficiente que depende del parámetro. Iguala ese coeficiente a cero para encontrar el valor crítico que cambia la clasificación del sistema. Analiza cada caso por separado: valor crítico y valores distintos del crítico.

PAU - Atención. Un ejercicio de sistema con parámetro puede traer dos apartados: (a) discutirlo (S.C.D., S.C.I. o S.I. según el valor del parámetro) y (b) resolverlo para un valor concreto. Se puntúan por separado: si la discusión no te sale, el apartado (b) se hace igual, sustituyendo el valor y resolviendo un sistema sin parámetro. En la discusión, estudia todos los casos: el valor que anula el coeficiente y todos los demás.

Clasificación de sistemas (Rouché-Frobenius)



n = número de incógnitas · A = matriz de coeficientes · A^* = matriz ampliada

Figura 2 - Clasificación de sistemas lineales y lo que significa en un sistema 2×2 , donde cada ecuación es una recta del plano. Verde: compatible determinado (solución única, las rectas se cortan en un punto). Azul: compatible indeterminado (infinitas soluciones con parámetro libre, las rectas coinciden). Rojo: incompatible (sin solución, las rectas son paralelas). El criterio es siempre comparar $\text{rg}(A)$ con $\text{rg}(A^*)$ y con n .

1.2.3 · Inecuaciones y región factible

Una **inecuación lineal** con dos variables define un semiplano en el plano cartesiano. La recta $ax + by = c$ divide el plano en dos semiplanos: en uno se cumple $ax + by < c$ y en el otro $ax + by > c$. Para saber cuál es cuál basta probar un punto que no esté en la recta, casi siempre el origen $(0, 0)$. La **región factible** es la intersección de todos los semiplanos definidos por las restricciones del problema.

Cómo representar una inecuación $ax + by \leq c$:

1) Dibuja la recta $ax + by = c$ (usa los puntos donde $x=0$ e $y=0$)

2) Sustituye el origen $(0,0)$ en la inecuación:

- Si $0 \leq c$ (verdadero) $\Rightarrow$ el semiplano válido contiene al origen
- Si $0 > c$ (falso) $\Rightarrow$ el semiplano válido NO contiene al origen

3) Sombrea el semiplano correcto

Restricciones habituales: $x \geq 0$, $y \geq 0$ (primer cuadrante)

Vértices de la región: puntos de intersección de dos rectas frontera

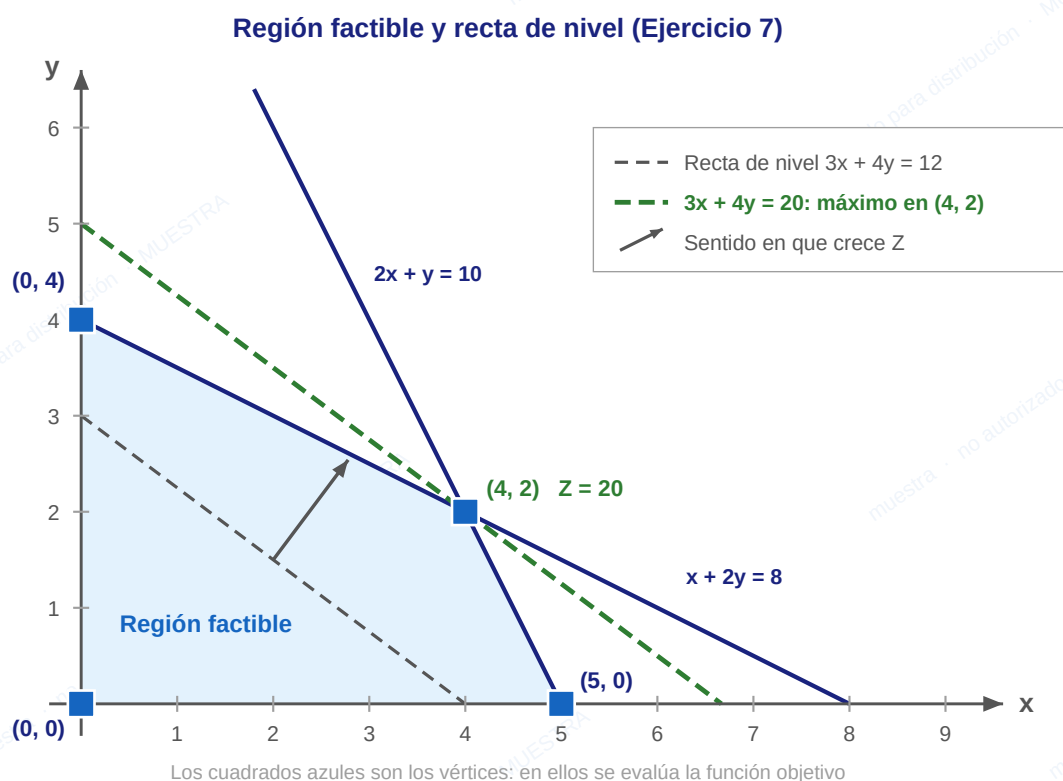


Figura 3 - Región factible del Ejercicio 7 (restricciones: $x+2y \leq 8$ y $2x+y \leq 10$, con $x,y \geq 0$). La región azul clara es el conjunto de puntos que cumplen todas las restricciones. Los cuadrados azules marcan los vértices $(0,0)$, $(5,0)$, $(4,2)$ y $(0,4)$, que son los únicos candidatos a óptimo en programación lineal. Las rectas discontinuas son rectas de nivel de $Z = 3x + 4y$: al desplazarlas en el sentido de la flecha Z crece, y la última que toca la región, $3x + 4y = 20$, solo la toca en $(4,2)$, donde está el máximo.

Truco. Para hallar los vértices de la región factible: cada vértice es la intersección de exactamente dos rectas frontera. Forma todos los sistemas 2×2 posibles con las restricciones activas, resuélvelos y descarta los que no cumplan el resto de restricciones. Los que quedan son los vértices de la región.

1.2.4 · Programación lineal: función objetivo

La **programación lineal** consiste en optimizar (maximizar o minimizar) una función lineal $Z = ax + by$ llamada **función objetivo**, sujeta a un conjunto de restricciones lineales que definen la región factible. **Teorema fundamental de la PL:** si la región factible es acotada (un polígono cerrado), la función objetivo alcanza su máximo y su mínimo, y los alcanza en **vértices** de la región. Si el óptimo sale igual en dos vértices, también lo dan todos los puntos del lado que los une: hay infinitas soluciones.

Algoritmo de programación lineal (método de los vértices):

- 1) Definir las variables de decisión (x , y)
- 2) Escribir la función objetivo: $Z = ax + by$ (maximizar o minimizar)
- 3) Escribir todas las restricciones como inecuaciones
- 4) Representar gráficamente la región factible
- 5) Calcular los vértices de la región factible
- 6) Evaluar Z en cada vértice
- 7) El vértice que da el mayor Z es el óptimo (si se maximiza)
El vértice que da el menor Z es el óptimo (si se minimiza)

Traducir el enunciado a restricciones:

«al menos», «como mínimo», «no menos de» $\Rightarrow \geq$

«como mucho», «como máximo», «no más de», «dispone de» $\Rightarrow \leq$

«no puede superar el doble de B» $\Rightarrow x \leq 2y$

«por lo menos tantos de A como de B» $\Rightarrow x \geq y$

Cantidades que se cuentan (unidades, personas) $\Rightarrow x \geq 0, y \geq 0$

PAU - Atención. Cuando el problema de programación lineal viene contado con palabras (una empresa, una dieta, un transporte), el planteamiento se puntúa aparte. En el modelo oficial de Andalucía para 2025-2026, de los 3 puntos del problema, 1 es del planteamiento y otro 1 del recinto con sus vértices: quien plantea bien y dibuja bien ya tiene dos tercios aunque se equivoque al final.

Región no acotada. Si la región factible es no acotada (se extiende al infinito), puede que no exista máximo. Si los dos coeficientes de Z son positivos y $x, y \geq 0$, Z nunca baja de 0, y entonces el mínimo sí existe y está en un vértice (Ejercicio 8). Si al dibujar tu región queda abierta, dilo en la respuesta y razona si el óptimo existe.

Error típico. Evaluar la función objetivo solo en algunos vértices y no en todos. El óptimo puede estar en el vértice menos intuitivo. Hay que calcular Z en TODOS los vértices de la región factible y comparar los resultados. Un vértice saltado puede ser el óptimo.

Ejercicios - Sección 1.2

Diez ejercicios de sistemas de ecuaciones y programación lineal al estilo PAU. En rojo el método que se aplica; en azul oscuro los cálculos paso a paso.

1. Resuelve el sistema por el método de Gauss: $x + y + z = 6$ | $2x - y + z = 3$ | $x + 2y - z = 2$.

Sistema 3x3: se aplica eliminación gaussiana para llevar la matriz a forma triangular y luego se sustituye hacia atrás.

Matriz ampliada del sistema (coeficientes | términos independientes), la misma de la figura 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

Ceros debajo del primer 1: $F_2 \leftarrow F_2 - 2 \cdot F_1$ y $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{array} \right)$$

Cero debajo del -3: $F_3 \leftarrow 3 \cdot F_3 + F_2$.

$$3 \cdot (0, 1, -2 | -4) + (0, -3, -1 | -9) = (0, 0, -7 | -21)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array} \right)$$

Sustitución hacia atrás, de la última fila a la primera:

$$\text{De } F_3: -7z = -21 \Rightarrow z = 3$$

$$\text{De } F_2: -3y - 3 = -9 \Rightarrow -3y = -6 \Rightarrow y = 2$$

$$\text{De } F_1: x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$$

Verificación: $1+2+3=6$ (OK) · $2-2+3=3$ (OK) · $1+4-3=2$ (OK)

Resultado: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

2. Discute y resuelve el sistema según el parámetro a: $x + y + z = 3 \mid 2x + y + az = 5 \mid x + 2y + z = 4$.

Sistema 3x3 con parámetro: aplicar Gauss simbólicamente y analizar el coeficiente que depende de a para determinar la clasificación.

$$F2 \leftarrow F2 - 2 \cdot F1: -y + (a-2)z = -1$$

$$F3 \leftarrow F3 - F1: y + 0 \cdot z = 1 \Rightarrow y = 1$$

Sustituimos $y=1$ en F2 transformada: $-1 + (a-2)z = -1 \Rightarrow (a-2)z = 0$

Caso a distinto de 2: $z = 0, y = 1, x = 3 - 1 - 0 = 2 \Rightarrow$ S.C.D.

Caso $a = 2$: $0 \cdot z = 0$, ecuación compatible para cualquier $z \Rightarrow$ S.C.I.

Solución con $a=2$ ($z = t$ parámetro libre):

$$y = 1, x = 3 - 1 - t = 2 - t \Rightarrow (2-t, 1, t), t \in \mathbb{R}$$

Resultado: a distinto de 2: S.C.D., solución única (2, 1, 0). Caso $a = 2$: S.C.I., solución (2-t, 1, t)

3. Comprueba que el siguiente sistema es incompatible (S.I.): $x + y + z = 1 \mid 2x + 2y + 2z = 5 \mid x - y + z = 0$.

Sistema S.I.: al aplicar Gauss aparecerá una fila con el tipo $0 = k$ (k distinto de 0), que indica contradicción.

$$F2 \leftarrow F2 - 2 \cdot F1: 0x + 0y + 0z = 5 - 2 = 3$$

$0 = 3 \Rightarrow$ CONTRADICCIÓN: sistema incompatible

Con Rouché-Frobenius: la segunda fila de A es el doble de la primera, luego $\text{rg}(A) = 2$.

Menor de A^* con las columnas de x, de y y del término independiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0+5) - 1(0-5) + 1(-2-2) = 5 + 5 - 4 = 6, \text{ distinto de } 0$$

$\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A^*) = 3$: son distintos $\Rightarrow$ S.I.

La segunda ecuación tiene los coeficientes del doble de la primera, pero su término independiente no es el doble (el doble de 1 es 2, y pone 5). Geométricamente, esos dos planos son paralelos y no tienen puntos en común.

Resultado: Sistema Incompatible (S.I.): no tiene solución

4. Estudia el sistema según k y resuelve los casos compatibles: $x + y + z = 2 \mid x - y + kz = 0 \mid 2x + y + z = 3$.

Sistema con parámetro k : aplicar Gauss y analizar el valor de k que hace cambiar la clasificación.

$$F2 \leftarrow F2 - F1: -2y + (k-1)z = -2$$

$$F3 \leftarrow F3 - 2 \cdot F1: -y + (-1)z = -1 \Rightarrow -y - z = -1$$

$$F2 \leftarrow F2 - 2 \cdot F3: -2y + (k-1)z - 2(-y-z) = -2 - 2(-1)$$

$$(k-1+2)z = 0 \Rightarrow (k+1)z = 0$$

Caso k distinto de -1 : $z = 0$

$$\text{De } F3: -y - 0 = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{De } F1: x = 2 - 1 - 0 = 1 \Rightarrow \text{S.C.D.: } (1, 1, 0)$$

Caso $k = -1$: $0 \cdot z = 0 \Rightarrow z = t$ libre $\Rightarrow$ S.C.I.

$$\text{De } F3: y = 1 - t, x = 2 - (1-t) - t = 1 \Rightarrow (1, 1-t, t)$$

No existe ningún valor de k que haga el sistema incompatible.

Resultado: k distinto de -1 : S.C.D., $(1, 1, 0)$. $k = -1$: S.C.I., $(1, 1-t, t)$ con $t \in \mathbb{R}$

5. Representa la región definida por el sistema de inecuaciones: $x + y \leq 4 \mid x - y \geq -2 \mid x \geq 0 \mid y \geq 0$. Indica los vértices de la región factible.

Sistema de inecuaciones: cada inecuación define un semiplano. La región factible es la intersección de todos los semiplanos.

Recta frontera 1: $x + y = 4 \Rightarrow$ puntos $(4,0)$ y $(0,4)$

Recta frontera 2: $x - y = -2 \Rightarrow$ puntos $(0,2)$ y $(-2,0)$ [fuera]; con $x=0$: $y=2$

Comprobamos el origen (0,0) en cada inecuación:

$x+y \leq 4$: $0 \leq 4$ (verdadero) $\Rightarrow$ semiplano que contiene al origen

$x-y \geq -2$: $0 \geq -2$ (verdadero) $\Rightarrow$ semiplano que contiene al origen

Vértices de la región (intersecciones de rectas frontera):

$x+y=4$ y $y=0$: $x=4 \Rightarrow (4, 0)$

$x-y=-2$ y $x=0$: $y=2 \Rightarrow (0, 2)$

$x+y=4$ y $x-y=-2$: sumando $2x=2$, $x=1$, $y=3 \Rightarrow (1, 3)$

(0,0) también pertenece a la región

Resultado: Vértices: (0,0), (4,0), (1,3), (0,2). Región poligonal con 4 vértices

6. Un instituto organiza una excursión para 240 alumnos. Una empresa dispone de 5 autobuses grandes, de 40 plazas, y de varios pequeños, de 20 plazas, pero solo tiene 9 conductores. Alquilar un autobús grande cuesta 300 € y uno pequeño, 200 €. ¿Cuántos autobuses de cada tipo hay que alquilar para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese coste?

Programación lineal con contexto: el planteamiento se puntúa aparte. Cada frase con «al menos», «como mucho» o «solo dispone de» es una restricción, y la pregunta dice si se maximiza o se minimiza.

Variables: x = autobuses grandes, y = autobuses pequeños

Función objetivo: minimizar $C = 300x + 200y$

Plazas, al menos 240: $40x + 20y \geq 240 \Rightarrow$ (entre 20) $2x + y \geq 12$

Conductores, como mucho 9: $x + y \leq 9$

Autobuses grandes disponibles: $x \leq 5$

No negatividad: $x \geq 0$, $y \geq 0$

Vértices (cada uno es la intersección de dos rectas frontera):

$2x+y=12$ y $x+y=9$: restando, $x = 3$; $y = 9 - 3 = 6 \Rightarrow (3, 6)$

$2x+y=12$ y $x=5$: $y = 12 - 10 = 2 \Rightarrow (5, 2)$

$x+y=9$ y $x=5$: $y = 9 - 5 = 4 \Rightarrow (5, 4)$

La región es el triángulo de esos tres vértices. Las rectas $x = 0$ e $y = 0$ no dan ningún vértice: dentro de la región x vale al menos 3 e y al menos 2.

Evalúamos $C = 300x + 200y$ en cada vértice:

$$C(3, 6) = 900 + 1200 = 2100 \text{ €}$$

$$C(5, 2) = 1500 + 400 = 1900 \text{ €} \leftarrow \text{mínimo}$$

$$C(5, 4) = 1500 + 800 = 2300 \text{ €}$$

Comprobación con el enunciado: 5 grandes y 2 pequeños llevan $5 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 240$ alumnos (OK), necesitan 7 conductores de los 9 (OK) y usan los 5 grandes (OK).

Resultado: 5 autobuses grandes y 2 pequeños. Coste mínimo: 1900 €

7. Maximiza $Z = 3x + 4y$ sujeto a: $x + 2y \leq 8$, $2x + y \leq 10$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Construir la región factible hallando los vértices y evaluar la función objetivo en cada uno.

Vértices de la región factible:

$$(0, 0): x=0, y=0 \text{ (cumple todas las restricciones)}$$

$$(5, 0): 2x+y=10 \text{ y } y=0 \Rightarrow x=5. \text{ Verificar: } 5+0=5 \leq 8 \text{ (OK)}$$

$$(0, 4): x+2y=8 \text{ y } x=0 \Rightarrow y=4. \text{ Verificar: } 0+4=4 \leq 10 \text{ (OK)}$$

$$(4, 2): x+2y=8 \text{ y } 2x+y=10 \Rightarrow x=4, y=2. \text{ Verificar: } 4+4=8 \text{ y } 8+2=10 \text{ (OK)}$$

Evalúamos $Z = 3x + 4y$:

$$Z(0, 0) = 0$$

$$Z(5, 0) = 15$$

$$Z(0, 4) = 16$$

$$Z(4, 2) = 12 + 8 = 20 \leftarrow \text{máximo}$$

Resultado: Máximo $Z = 20$ en el punto $(4, 2)$

8. Minimiza $Z = x + 2y$ sujeto a: $x + 2y \geq 6$, $x + y \geq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Región factible no acotada (se extiende al infinito hacia arriba). En este caso existe mínimo porque los coeficientes de Z son positivos.

Vértices de la región (parte acotada del contorno):

(6, 0): $x+2y=6$ y $y=0 \Rightarrow x=6$. Verificar: $6+0=6 \geq 4$ (OK)

(4, 0): $x+y=4$ y $y=0 \Rightarrow x=4$. Verificar: $4+0=4 < 6$ NO cumple $x+2y \geq 6$

(0, 4): $x+y=4$ y $x=0 \Rightarrow y=4$. Verificar: $0+8=8 \geq 6$ (OK)

(2, 2): $x+2y=6$ y $x+y=4 \Rightarrow y=2, x=2$. Verificar ambas (OK)

Vértices válidos: (6,0), (2,2), (0,4)

Evaluamos $Z = x + 2y$:

$$Z(6, 0) = 6$$

$$Z(2, 2) = 2 + 4 = 6$$

$$Z(0, 4) = 0 + 8 = 8$$

El mínimo se alcanza en (6,0) y en (2,2): $Z=6$ en ambos. Cuando el mínimo se alcanza en dos vértices, todos los puntos del segmento que los une también son óptimos.

Resultado: Mínimo $Z = 6$ alcanzado en (6,0) y en (2,2) (y en todo el segmento entre ellos)

9. Problema de producción: Una empresa fabrica dos productos A y B. A requiere 2 h de máquina y 1 h de mano de obra; B requiere 1 h de máquina y 3 h. Disponibles: 100 h de máquina y 150 h de mano de obra. Beneficio: 4 € por unidad de A y 6 € por unidad de B. ¿Cuántas unidades de cada tipo maximizan el beneficio?

Traducción al lenguaje matemático de la programación lineal: identificar variables, restricciones y función objetivo.

Variables: x = unidades de A producidas, y = unidades de B producidas

Función objetivo: maximizar $Z = 4x + 6y$

Restricción de máquina: $2x + y \leq 100$

Restricción de mano de obra: $x + 3y \leq 150$

No negatividad: $x \geq 0, y \geq 0$

Vértices de la región factible:

$(0, 0): Z = 0$

$(50, 0): 2(50)+0=100 \text{ (OK)}; 50+0=50 \leq 150 \text{ (OK)}. Z = 200$

$(0, 50): 0+50=50 \leq 100 \text{ (OK)}; 0+150=150 \text{ (OK)}. Z = 300$

Intersección $2x+y=100$ y $x+3y=150$: $x=30, y=40$. Verificar: $60+40=100$ y $30+120=150$ (OK)

$(30, 40): Z = 4(30) + 6(40) = 120 + 240 = 360 \leftarrow \text{máximo}$

Resultado: Producir 30 unidades de A y 40 de B. Beneficio máximo = 360 €

10. Problema de planteamiento: una tienda vende camisetas de tres modelos, A, B y C, a 10 €, 15 € y 20 € la unidad. Un día vendió 60 camisetas y recaudó 850 €. Del modelo A vendió 5 menos que el doble de las que vendió del modelo C. ¿Cuántas camisetas de cada modelo vendió?

Sistema con contexto: lo primero que se puntúa es el planteamiento. Se nombran las incógnitas, cada frase del enunciado que da un dato se convierte en una ecuación, y después se resuelve por Gauss.

Incógnitas: x, y, z = camisetas vendidas de los modelos A, B y C

Total de camisetas: $x + y + z = 60$

Recaudación: $10x + 15y + 20z = 850 \Rightarrow$ (entre 5) $2x + 3y + 4z = 170$

A es el doble de C menos 5: $x = 2z - 5 \Rightarrow x - 2z = -5$

Gauss, tomando como pivote la primera ecuación:

F2 $\leftarrow$ F2 - 2·F1: $y + 2z = 170 - 120 = 50$

F3 $\leftarrow$ F3 - F1: $-y - 3z = -5 - 60 = -65$

F3 $\leftarrow$ F3 + F2: $-z = -65 + 50 = -15 \Rightarrow z = 15$

Sustitución hacia atrás:

De F2: $y = 50 - 2 \cdot 15 = 20$

De F1: $x = 60 - 20 - 15 = 25$

Comprobación con el enunciado: $25 + 20 + 15 = 60$ (OK) · $10 \cdot 25 + 15 \cdot 20 + 20 \cdot 15 = 250 + 300 + 300 = 850$ (OK) · $2 \cdot 15 - 5 = 25$ (OK). Las tres cantidades son números naturales, como exige el contexto: si saliera un decimal o un negativo, el fallo estaría en el planteamiento.

Resultado: 25 camisetas del modelo A, 20 del modelo B y 15 del modelo C

Siguiente sección: **1.3 Cramer, Inecuaciones y Ecuaciones Matriciales** — regla de Cramer para sistemas 2×2 y 3×3 , sistemas de inecuaciones y resolución de ecuaciones matriciales $AX=B$ y $XA=B$.