

1

Álgebra

Tema 1.1 · Matrices y Determinantes

Apuntes completos para la PAU: concepto de matriz, operaciones (suma, producto por escalar, producto matricial), traspuesta y potencias, cálculo de determinantes por Sarrus y por desarrollo de adjuntos, rango de una matriz, cálculo de la inversa y resolución de ecuaciones matriciales. Teoría explicada paso a paso con diagramas, cuadros de fórmulas y trece ejercicios resueltos al estilo PAU.

Temas del bloque 1

1.1 Matrices y Determinantes (este apunte)

Operaciones, traspuesta, potencias, determinantes (Sarrus, adjuntos), rango, inversa y ecuaciones matriciales.

1.2 Sistemas y Programación Lineal

Método de Gauss, clasificación por Rouché-Frobenius, sistemas con parámetro, inecuaciones, región factible y función objetivo.

1.3 Cramer, Inecuaciones y Ecuaciones Matriciales

Determinantes, regla de Cramer, sistemas de inecuaciones y ecuaciones matriciales, por la inversa y por un sistema.

Apuntes de preparación para la PAU · 2.º de Bachillerato

Ejemplar de muestra gratuito, igual para todos. Prohibida su venta o redistribución sin permiso escrito del titular.

© 2026 PAUmode. Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial, la distribución, la comunicación pública y la transformación de esta obra sin autorización escrita del titular. El incumplimiento podrá dar lugar a las acciones civiles y penales previstas en la legislación sobre propiedad intelectual.

1.1 Matrices y Determinantes

1.1 Matrices · 1.2 Sistemas y PL · 1.3 Cramer/Inecuaciones · 2.1 Integrales · 2.2 Derivadas · 2.3 Funciones · 3.1 Probabilidad · 3.2 Distribuciones · 4.1 Inferencia.

1.1.1 · Concepto de matriz

Una **matriz** de orden $m \times n$ es una tabla rectangular de m filas y n columnas. Cada elemento se denota a_{ij} , donde i es el número de fila y j el de columna. Las matrices se representan con letras mayúsculas: A, B, C, ...

Notación: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$)

Tipos especiales:

Matriz cuadrada: $m = n$ (mismo número de filas y columnas)

Matriz fila: $m = 1$ (una sola fila)

Matriz columna: $n = 1$ (una sola columna)

Matriz nula O: todos los elementos son cero

Matriz identidad I_n : cuadrada con 1 en la diagonal principal y 0 en el resto

Traspuesta A^t : intercambia filas y columnas $\Rightarrow (A^t)_{ij} = a_{ji}$

Matriz simétrica: la que cumple $A^t = A$ (solo puede serlo una matriz cuadrada)

Estructura de una matriz de orden 3×4 ($m = 3$ filas, $n = 4$ columnas)

Fila 1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
Fila 2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
Fila 3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
	Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4

Orden: $m \times n$
 $m = 3$ filas
 $n = 4$ columnas
 Elemento sombreado:
 a_{23} = fila 2, columna 3

Figura 1 - Anatomía de una matriz de orden 3×4 . El elemento sombreado es a_{23} : está en la fila 2 y la columna 3. Los corchetes delimitan la matriz.

Orden de una matriz. El orden $m \times n$ siempre se escribe "filas $\times$ columnas". Una matriz 2×3 tiene 2 filas y 3 columnas, con 6 elementos en total. Cuidado: una matriz 2×3 y una 3×2 son distintas (y no se pueden sumar).

La **traspuesta** merece un apartado propio porque el examen la usa mucho más de lo que parece: trabajar con A^t aparece en 81 de los 362 exámenes de PAU contados y en 12 de las 17 comunidades. Lo que hay que saber es manejarla dentro de una igualdad que hay que despejar o comprobar, del estilo de $X \cdot A^t = B$ o $A \cdot A^t = I$.

Propiedades de la traspuesta:

$(A^t)^t = A$ (trasponer dos veces devuelve la matriz de partida)

$(A + B)^t = A^t + B^t$

$(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$

$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (¡el orden se invierte!)

$|A^t| = |A|$ (trasponer no cambia el determinante)

Error típico. En $(A \cdot B)^t$ el orden de los factores **se da la vuelta**: es $B^t \cdot A^t$, no $A^t \cdot B^t$. Se ve enseguida con las dimensiones: si A es 2×3 y B es 3×4 , el producto $A \cdot B$ es 2×4 y su traspuesta es 4×2 ; B^t es 4×3 y A^t es 3×2 , y al multiplicarlos en ese orden sale 4×2 . Al revés ni siquiera se podrían multiplicar.

1.1.2 · Operaciones con matrices

Las operaciones básicas con matrices son la suma, el producto por un escalar y el producto de dos matrices. Las dos primeras son análogas a las de los números reales y se hacen elemento a elemento; el producto matricial tiene reglas propias y es el que hay que aprender con cuidado.

Suma $A + B$ (requiere mismo orden $m \times n$):

$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (se suman elemento a elemento)

Producto por escalar k :

$(k \cdot A)_{ij} = k \cdot a_{ij}$ (se multiplica cada elemento por k)

Producto $A \cdot B$ (requiere: columnas de A = filas de B):

Si A es $m \times n$ y B es $n \times p \Rightarrow C = A \cdot B$ es $m \times p$

$(A \cdot B)_{ij}$ = suma de $a_{ik} \cdot b_{kj}$ para $k = 1, \dots, n$

Producto $A \cdot B$: cada elemento es una fila de A por una columna de B

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 2 & 5 \\ 8 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

tienen que coincidir

(filas de $A \times$ columnas de B)

$$c_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = 7$$

fila 1 de A por columna 2 de B : se multiplican en orden y se suman los productos
el resultado va a la fila 1, columna 2 de C (recuadrado)

Figura 2 - Producto de A (2×3) por B (3×4). El elemento c_{12} sale de la fila 1 de A (azul) y la columna 2 de B (naranja): $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) = 7$. Solo se puede multiplicar porque las columnas de A (3) coinciden con las filas de B (3), y el resultado tiene las filas de A y las columnas de B : 2×4 .

Truco. Para calcular el elemento c_{ij} del producto $A \cdot B$: toma la fila i de A y la columna j de B , multiplica elemento a elemento y suma los productos. Ejemplo: $c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}$.

Error típico. El producto de matrices NO es conmutativo en general: $A \cdot B$ es distinto de $B \cdot A$. Además, $B \cdot A$ puede no existir aunque $A \cdot B$ sí exista (porque las dimensiones pueden no ser compatibles en el otro orden).

Potencias de una matriz. Como A^n significa multiplicar A por sí misma n veces, solo tiene sentido si el producto $A \cdot A$ se puede hacer, y eso obliga a que A sea **cuadrada**. El examen rara vez pide A^2 o A^3 por sí mismos: lo que pide es una potencia alta, del tipo A^{50} o A^{2027} , que nadie va a multiplicar cincuenta veces. Se resuelve **buscando el patrón**.

Potencia: $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ (n veces) Solo si A es cuadrada.

Por convenio: $A^1 = A$ y $A^0 = I_n$

Método para una potencia alta (tres pasos):

- 1) Calcular A^2 , A^3 y, si hace falta, A^4 .
- 2) Escribir los resultados en fila y mirar qué se repite o qué crece de forma regular.
- 3) Escribir la fórmula de A^n y comprobarla con un caso ya calculado.

Los tres patrones que hay que saber reconocer:

Se repite en ciclo: si $A^3 = I$, entonces A^n depende solo del resto de dividir n entre 3.

Se apaga: si $A^2 = O$ o $A^3 = O$, todas las potencias siguientes son la matriz nula O .

Se queda igual: si $A^2 = A$, entonces $A^n = A$ para todo n mayor o igual que 1.

Crece con regla fija: los elementos siguen una fórmula en n (por ejemplo 2^n o n).

Error típico. $(A \cdot B)^2$ **no** es $A^2 \cdot B^2$. Al desarrollar $(A \cdot B)^2 = A \cdot B \cdot A \cdot B$ no se pueden juntar las dos A ni las dos B , porque el producto no es conmutativo. Por lo mismo, $(A+B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$, y el término del medio no se puede escribir como $2A \cdot B$ salvo que se sepa que $A \cdot B = B \cdot A$.

PAU - Atención. Calcular una potencia de una matriz cae en 60 de los 362 exámenes de PAU contados y en 14 de las 17 comunidades. Si el enunciado pide A^2 y A^3 antes de pedir A^n , es porque quiere que veas el patrón en esos dos primeros. Y una fórmula de A^n sin comprobar en un caso concreto vale poco: sustituye $n = 2$ en tu fórmula y mira si sale el A^2 que ya tienes.

1.1.3 · Cálculo de determinantes

El **determinante** es un número asociado a una matriz cuadrada. Se denota $|A|$ o $\det(A)$. Solo existe para matrices cuadradas. Su valor determina si la matriz tiene inversa y es clave para resolver sistemas de ecuaciones.

Determinante de orden 2 (fórmula directa):

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}: |A| = a \cdot d - b \cdot c$$

(el producto de la diagonal principal menos el de la otra diagonal)

Determinante de orden 3 (regla de Sarrus):

$$|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - c \cdot e \cdot g - a \cdot f \cdot h - b \cdot d \cdot i$$

$$\text{Propiedades: } |A \cdot B| = |A| \cdot |B| \quad |A^t| = |A| \quad |k \cdot A| = k^n \cdot |A|$$

Si una fila/columna es cero o hay dos iguales: $|A| = 0$

Regla de Sarrus: se copian las dos primeras columnas a la derecha

Diagram illustrating the Rule of Sarrus for a 3x3 matrix $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. The matrix is shown with its first two columns repeated to the right, enclosed by vertical bars.

Diagonales que bajan: suman (+)

Three green diagonal arrows pointing down-right represent the products to be added: $a \cdot e \cdot i$, $b \cdot f \cdot g$, and $c \cdot d \cdot h$.

Diagonales que suben: restan (-)

Three red diagonal arrows pointing up-right represent the products to be subtracted: $c \cdot e \cdot g$, $a \cdot f \cdot h$, and $b \cdot d \cdot i$.

$$|A| = a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h - (c \cdot e \cdot g + a \cdot f \cdot h + b \cdot d \cdot i)$$

Las barras verticales encierran el determinante; en gris, las dos columnas copiadas.

Figura 3 - Regla de Sarrus: se copian las dos primeras columnas a la derecha (en gris). Las tres diagonales que bajan (verdes) dan los productos que suman; las tres que suben (rojas), los que restan. El determinante es la suma de las verdes menos la de las rojas.

Truco. Cuando en el examen piden el determinante de una 3×3 , la regla de Sarrus es más rápida. Cuando piden "desarrollo por adjuntos", elegir la fila o columna con más ceros para simplificar los cálculos.

PAU - Atención. En la PAU de Mates CCSS el determinante se usa como herramienta: sirve para saber si existe la inversa, para despejar una ecuación matricial o para clasificar un sistema. Pero también se pide solo: «calcule el valor del determinante» aparece como pregunta entera en 10 de los 362 exámenes contados y en 5 comunidades, así que conviene saber calcularlo sin apoyarse en para qué va a servir después. Y hay otra pregunta con determinante que conviene tener preparada: hallar para qué valores de un parámetro la matriz deja de tener inversa (es decir, para qué valores se anula el determinante), que cae en 46 de los 362 y en 12 comunidades.

1.1.4 · Rango de una matriz y matriz inversa

El **rango** de una matriz es el número máximo de filas (o de columnas) **linealmente independientes**: filas de las que ninguna se puede escribir sumando las otras multiplicadas por números. Dicho de otro modo, es cuánta información distinta hay de verdad en la matriz. Como no puede haber más filas independientes que filas, ni más columnas independientes que columnas, siempre se cumple que el rango es menor o igual que el menor de los dos números del orden.

Hay dos maneras de calcularlo y las dos se admiten en el examen. La primera usa determinantes: las orientaciones de Andalucía piden el «cálculo de determinantes hasta de orden 3 para el cálculo del rango y la inversa de una matriz», aunque el currículo estatal no los nombra; la segunda es la de Gauss, más rápida cuando la matriz tiene ceros o números pequeños.

Método 1 — por menores (con determinantes)

El rango es el orden del mayor determinante no nulo que sale de la matriz.

Se sube escalón a escalón:

a) Hay algún elemento distinto de cero => el rango es al menos 1.

b) Se busca un menor 2×2 que no valga 0 (tapando filas y columnas).

Si aparece => al menos 2. Si TODOS valen 0 => el rango es 1.

c) Se busca un menor 3×3 que no valga 0, ampliando el 2×2 que sirvió.

Si aparece => rango 3. Si TODOS valen 0 => el rango se queda en 2.

Método 2 — por escalonamiento (Gauss)

Se hacen ceros debajo de la diagonal con estas tres operaciones,

que son las únicas que NO cambian el rango:

intercambiar dos filas

multiplicar una fila por un número distinto de 0

sumar a una fila un múltiplo de otra fila

El rango es el número de filas que NO han quedado todas a cero.

Si A es cuadrada $n \times n$, estas tres cosas significan lo mismo:

$|A| \neq 0$ | $\text{rango}(A) = n$ | A tiene inversa

Truco. Para una matriz cuadrada, empieza siempre por el determinante grande: si $|A|$ no es cero, el rango ya es máximo y has terminado en un cálculo. Solo si sale cero hay que bajar a los menores más pequeños.

Error típico. Una fila de ceros no cuenta para el rango, pero una **columna** de ceros tampoco: el rango se puede mirar por filas o por columnas y sale lo mismo. Y ojo con el método de Gauss: multiplicar una fila por **cero** no está permitido, porque eso sí cambiaría el rango.

La **matriz inversa** A^{-1} de una matriz cuadrada A existe si y solo si $|A| \neq 0$ (es decir, si A es de rango máximo). Se cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Inversa por adjuntos (sirve para 2×2 y 3×3):

$$A^{-1} = (1 / |A|) \cdot \text{Adj}(A)^t$$

$\text{Adj}(A)$ = matriz de cofactores $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

M_{ij} = menor complementario (det. 2×2 que queda al tapar fila i y columna j)

Los cuatro pasos, siempre en este orden:

1) Calcular $|A|$. Si vale 0, se acaba aquí: no hay inversa.

2) Escribir la matriz de cofactores C_{ij} (menor con su signo).

3) Trasponerla.

4) Dividir todo entre $|A|$.

Inversa de una matriz 2×2 (caso particular, fórmula directa):

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ con $|A| = a \cdot d - b \cdot c$ distinto de cero, entonces:

$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Comprobación (vale para cualquier orden): $A \cdot A^{-1}$ tiene que dar I_n .

Truco. Para la inversa 2×2, basta recordar: intercambia los elementos de la diagonal (a y d), cambia el signo de los otros dos (b y c), y divide todo por |A|. Es el método más rápido en el examen cuando la matriz es 2×2. Y en cualquier orden, el paso 4 se deja para el final: se trabaja con números enteros y solo al terminar se saca el 1/|A| como factor común.

Error típico. Si $|A| = 0$ la matriz NO tiene inversa. Si se intenta calcularla de todas formas, sale una división por cero. Siempre calcular el determinante primero; si vale 0, la conclusión es directa: la inversa no existe.

PAU - Atención. Calcular la matriz inversa cae en 103 de los 362 exámenes de PAU contados y en 14 de las 17 comunidades. Además de pedirse sola, es el paso de en medio para despejar una matriz X, que es lo que viene en el apartado siguiente.

1.1.5 · Ecuaciones matriciales: despejar la matriz X

Una **ecuación matricial** es una igualdad entre matrices en la que una de ellas es la incógnita, y se llama X. Es exactamente lo mismo que despejar la x de una ecuación de toda la vida, con **una única diferencia**, y en esa diferencia está todo: entre matrices no se puede dividir, y como el producto no es conmutativo, tampoco da igual por qué lado se multiplica.

En lugar de dividir, se multiplican los dos miembros por A^{-1} . Y hay que multiplicar **por el mismo lado en los dos miembros**: si en la izquierda A está delante de X, A^{-1} tiene que entrar por delante en los dos lados; si A está detrás, por detrás en los dos lados. Ese es el único punto donde se pierde el ejercicio.

Los dos casos, y no se pueden confundir:

$A \cdot X = B$ (A está a la IZQUIERDA de X)

Se multiplica por A^{-1} por la izquierda en los dos miembros:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$X \cdot A = B$ (A está a la DERECHA de X)

Se multiplica por A^{-1} por la derecha en los dos miembros:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X \cdot I = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

Casos que salen de juntar los dos anteriores:

$$A \cdot X + B = C \rightarrow A \cdot X = C - B \rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B)$$

$$A \cdot X \cdot B = C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \text{ (cada inversa entra por su lado)}$$

$$A \cdot X = B + X \rightarrow A \cdot X - X = B \rightarrow (A - I) \cdot X = B \rightarrow X = (A - I)^{-1} \cdot B$$

Antes de nada: comprobar que $|A| \neq 0$. Si vale 0 no hay inversa y este camino no existe.

Error típico. Un fallo que sale caro: escribir $X = B \cdot A^{-1}$ cuando la ecuación era $A \cdot X = B$. Como el producto no es conmutativo, esas dos matrices son distintas y la respuesta está mal entera, aunque la inversa se haya calculado bien. Regla para no equivocarse nunca: A^{-1} entra por el mismo lado por el que A está pegada a X. Si A toca a X por la izquierda, A^{-1} por la izquierda; si la toca por la derecha, por la derecha.

Truco. Si al despejar dudas, mira las **dimensiones** y te lo dicen ellas. En $A \cdot X = B$, si A es 2×2 y B es 2×3 , X tiene que ser 2×3 para que el producto encaje. Y $A^{-1} \cdot B$ es $(2 \times 2) \cdot (2 \times 3) = 2 \times 3$, que cuadra; $B \cdot A^{-1}$ sería $(2 \times 3) \cdot (2 \times 2)$, que ni siquiera se puede multiplicar. Cuando el orden está mal, muchas veces el producto ni existe.

El otro camino: convertirla en un sistema. Las orientaciones de Andalucía nombran los dos, y este segundo no necesita calcular ninguna inversa. Se escribe X con sus elementos sin conocer, se hace el producto tal como aparece en la ecuación, se igualan los elementos que ocupan el mismo sitio en las dos matrices y sale un sistema de ecuaciones normal. Es más lento, pero es la salida cuando $|A| = 0$ y la inversa no existe.

Camino 2 — transformar la ecuación en un sistema:

1) Escribir la incógnita con letras: $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$.

El orden que tiene X lo fijan las dimensiones de A y de B.

2) Hacer el producto $A \cdot X$ dejando las letras dentro.

3) Igualar elemento a elemento con B: cada casilla da una ecuación.

4) Resolver el sistema. Las soluciones son los elementos de X.

PAU - Atención. Es el ejercicio de matrices más frecuente de toda la asignatura.

Resolver una ecuación matricial despejando con la inversa cae en 129 de los 362 exámenes de PAU contados y en 15 de las 17 comunidades: más que sumar o multiplicar matrices (119) y más que calcular una inversa suelta (103). Además, despejar *dos* matrices a la vez de un sistema de dos ecuaciones matriciales cae en 14 exámenes de 7 comunidades. Si de este apunte solo se pudiera estudiar un apartado, sería este.

Ejercicios - Sección 1.1

Trece ejercicios de matrices y determinantes al estilo PAU. En rojo el método; en azul oscuro los cálculos numéricos paso a paso.

1. Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, calcula $A+B$ y $A \cdot B$.

Para la suma: sumamos elemento a elemento (mismo orden 2×2). Para el producto: cada elemento c_{ij} es el producto fila i de A por columna j de B.

Suma $A + B$. Antes de nada se comprueba que se puede hacer: las dos son 2×2 , mismo orden, así que la suma existe y se hace casilla a casilla.

$$a_{11} + b_{11} = 1 + 2 = 3 \mid a_{12} + b_{12} = 2 + (-1) = 1$$

$$a_{21} + b_{21} = 3 + 1 = 4 \mid a_{22} + b_{22} = 0 + 4 = 4$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Producto $A \cdot B$. Aquí lo que hay que comprobar es otra cosa: que las columnas de A (2) sean tantas como las filas de B (2). Lo son, y el resultado será 2×2 .

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$$

$$c_{12} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 = -1 + 8 = 7$$

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 6 + 0 = 6$$

$$c_{22} = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 = -3 + 0 = -3$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Resultado: $A+B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \mid A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

2. Calcula el determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ por la regla de Sarrus.

Regla de Sarrus: identificamos los 9 elementos con letras ($a..i$ por filas), ampliamos con las dos primeras columnas a la derecha y calculamos las tres diagonales positivas menos las tres negativas.

Identificación de elementos: $a=2, b=1, c=-1, d=0, e=3, f=2, g=1, h=0, i=1$

Diagonales positivas (izquierda a derecha):

$$a \cdot e \cdot i = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

$$b \cdot f \cdot g = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \quad (b=a_{12}=1, f=a_{23}=2, g=a_{31}=1)$$

$$c \cdot d \cdot h = (-1) \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{Suma positivos: } 6 + 2 + 0 = 8$$

Diagonales negativas (derecha a izquierda):

$$c \cdot e \cdot g = (-1) \cdot 3 \cdot 1 = -3$$

$$a \cdot f \cdot h = 2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

$$b \cdot d \cdot i = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$\text{Suma negativos: } -3 + 0 + 0 = -3$$

$$|A| = 8 - (-3) = 11$$

Resultado: $|A| = 11$

3. Halla la matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Usamos la fórmula directa para matrices 2×2 : primero calculamos el determinante; si es distinto de cero, aplicamos la fórmula $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

$$|A| = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 6 - 5 = 1 \text{ (distinto de 0: sí existe la inversa)}$$

$$A^{-1} = (1/1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Comprobación: $A \cdot A^{-1}$ debe dar I_2 :

$$3 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) = 6 - 5 = 1 \mid 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = -3 + 3 = 0$$

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = 10 - 10 = 0 \mid 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = -5 + 6 = 1$$

Resultado correcto: obtenemos la identidad I_2 .

Resultado: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

4. Calcula el rango de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Aplicamos eliminación gaussiana (operaciones elementales de filas) para llevar B a forma escalonada. El rango es el número de filas no nulas tras el escalonamiento.

Matriz inicial:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$F2 \leftarrow F2 - 2 \cdot F1: (2 - 2 \cdot 1, 4 - 2 \cdot 2, 6 - 2 \cdot 3) = (0, 0, 0)$$

$$F3 \leftarrow F3 - F1: (1 - 1, 3 - 2, 5 - 3) = (0, 1, 2)$$

Estado tras ambas operaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Intercambiamos F2 y F3 (para tener el pivote arriba):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La primera fila tiene el pivote en la columna 1, la segunda en la columna 2 y la tercera es nula.

Hay 2 filas no nulas $\Rightarrow \text{rango}(B) = 2$

La fila 2 original era 2·fila 1: eran linealmente dependientes. Por eso el rango es 2, no 3.

El mismo rango por el otro camino, el de los menores, que es el que nombran las orientaciones de Andalucía. Se empieza por arriba: si el determinante 3×3 no fuera cero, el rango sería 3 y habríamos terminado.

$$|B| = 1 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$|B| = 20 + 12 + 18 - 12 - 18 - 20 = 0 \Rightarrow \text{el rango NO es 3}$$

Bajamos a orden 2. Basta con encontrar UN menor 2×2 distinto de cero; tomamos el de las filas 1 y 3 con las columnas 1 y 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1 \text{ distinto de } 0 \Rightarrow \text{rango}(B) = 2$$

Los dos caminos dan 2, como tenía que ser. En el examen se elige uno solo: el de los menores si la matriz es cuadrada y pequeña, el de Gauss si hay ceros que aprovechar.

Resultado: $\text{rango}(B) = 2$

5. Comprueba que $A \cdot B \neq B \cdot A$ para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Calculamos los dos productos y comparamos. Esta es la demostración de que el producto matricial NO es conmutativo en general.

Producto $A \cdot B$:

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 \mid c_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$c_{21} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \mid c_{22} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Producto $B \cdot A$:

$$d_{11} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \mid d_{12} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$$

$$d_{21} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 \mid d_{22} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Las dos matrices tienen el mismo orden y aun así son distintas, luego $A \cdot B \neq B \cdot A$ y queda comprobado lo que pedía el enunciado.

Basta con encontrar **un** par de matrices que no conmuten para demostrar que el producto no es conmutativo en general. Eso no quiere decir que nunca conmuten: la identidad conmuta con todas, y A conmuta consigo misma.

Resultado: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es distinto de $B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$ producto NO conmutativo

6. Calcula la expresión $M = A^2 - 2A + I$ para $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Calculamos primero $A^2 = A \cdot A$, luego restamos $2A$ y sumamos la identidad I_2 . Las operaciones se hacen elemento a elemento una vez que tenemos cada matriz.

Cálculo de $A^2 = A \cdot A$:

$$a_{11}: 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 4 \mid a_{12}: 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 5$$

$$a_{21}: 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 0 \mid a_{22}: 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 9$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Ahora las otras dos piezas. $2A$ es un producto por un escalar, así que se multiplica cada elemento por 2; y la I que hay que sumar es la identidad de orden 2, porque las otras dos matrices son 2×2 y si no, la suma no se podría hacer:

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \mid I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con las tres matrices del mismo orden, la resta y la suma ya son casilla a casilla:

$$M = A^2 - 2A + I_2 = \begin{bmatrix} 4-4+1 & 5-2+0 \\ 0-0+0 & 9-6+1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ojo con el orden de los cálculos: primero se obtiene cada matriz entera (A^2 , $2A$, I_2) y solo después se suman y se restan. No se puede ir mezclando elementos de una con operaciones de otra.

Resultado: $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

7. Calcula $|A|$ por desarrollo de adjuntos en la primera fila, siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

El desarrollo por adjuntos en la fila 1 es: $|A| = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}$. El **adjunto** (cofactor) es $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ donde M_{ij} es el menor complementario (det 2×2 al tapar fila i y col j). El signo $(-1)^{i+j}$ es + si $i+j$ es par, - si es impar.

Menores complementarios (det 2×2 tras tapar la fila y columna correspondientes):

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) = 2$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -4$$

Adjuntos (aplicamos el signo $(-1)^{i+j}$):

$$C_{11} = (-1)^2 \cdot M_{11} = (+1) \cdot 2 = 2$$

$$C_{12} = (-1)^3 \cdot M_{12} = (-1) \cdot (-2) = 2$$

$$C_{13} = (-1)^4 \cdot M_{13} = (+1) \cdot (-4) = -4$$

Desarrollo por la primera fila:

$$|A| = 2 \cdot C_{11} + 0 \cdot C_{12} + (-1) \cdot C_{13}$$

$$|A| = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) = 4 + 0 + 4 = 8$$

Resultado: $|A| = 8$

8. Halla la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ por el método de los adjuntos.

Seguimos los cuatro pasos de la fórmula $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A)^t$: primero el determinante, porque si vale cero no hay nada que hacer; después los nueve cofactores, que son los menores 2×2 con su signo; después se traspone esa matriz de cofactores; y solo al final se divide entre el determinante, para trabajar con enteros todo el rato.

Paso 1 — El determinante, para saber si existe la inversa. Lo desarrollamos por la primera fila, que tiene un cero:

$$|A| = 1 \cdot (1 \cdot 2 - 0 \cdot 1) - 0 \cdot (2 \cdot 2 - 0 \cdot 0) + 1 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 2 - 0 + 2 = 4$$

Como $|A| = 4 \neq 0$, la inversa existe. (OK)

Paso 2 — Los nueve cofactores. Cada uno es el determinante 2×2 que queda al tapar su fila y su columna, con el signo $(-1)^{i+j}$: + si $i+j$ es par, - si es impar.

$$C_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2$$

$$C_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 0 \cdot 0) = -4$$

$$C_{13} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 2$$

$$C_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 1$$

$$C_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2$$

$$C_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = -1$$

$$C_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$C_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = 2$$

$$C_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 = 1$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 3 — Trasponer la matriz de cofactores (la fila 1 pasa a ser la columna 1):

$$\text{Adj}(A)^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4 — Dividir entre $|A| = 4$. Se deja el $1/4$ fuera como factor común, que es más limpio que escribir nueve fracciones:

$$A^{-1} = (1/4) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación — $A \cdot A^{-1}$ tiene que dar I_3 . Basta con la primera fila para quedarse tranquilo:

$$\text{Fila 1 de A por columna 1: } (1/4) \cdot (1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 2) = (1/4) \cdot 4 = 1$$

$$\text{Fila 1 de A por columna 2: } (1/4) \cdot (1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)) = (1/4) \cdot 0 = 0$$

$$\text{Fila 1 de A por columna 3: } (1/4) \cdot (1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = (1/4) \cdot 0 = 0$$

Sale $(1, 0, 0)$, que es la primera fila de I_3 : la inversa es correcta.

$$\text{Resultado: } A^{-1} = (1/4) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Una empresa tiene dos academias A1 y A2. La matriz de costes por hora (en euros) es

$C = \begin{bmatrix} 12 & 15 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$, donde las filas son las academias y las columnas, las materias (Matemáticas y Física). Si un alumno necesita 20 h de Matemáticas y 10 h de Física, calcula el coste total en cada academia usando matrices.

El coste total es el producto matricial $C \cdot h$, donde h es el vector columna de horas (matriz 2×1). El elemento i del resultado es el coste en la academia i .

Las horas se escriben como una matriz columna 2×1 , en el mismo orden en que están las materias en las columnas de C : $h = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}$, es decir 20 horas de Matemáticas arriba y 10 de Física abajo.

Producto $C \cdot h$. Es 2×2 por 2×1 , así que el resultado es 2×1 : un coste por academia, que es justo lo que pide el enunciado.

Academia A1: $12 \cdot 20 + 15 \cdot 10 = 240 + 150 = 390$ euros

Academia A2: $10 \cdot 20 + 18 \cdot 10 = 200 + 180 = 380$ euros

La academia A2 resulta más económica en este caso (380 euros frente a 390).

Resultado: A1: 390 euros | A2: 380 euros

10. Halla los valores de k para los que la matriz $A = \begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ no tiene inversa. Para el valor encontrado, calcula el rango de A .

Una matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero. Calculamos $|A|$ en función de k , igualamos a cero y despejamos k .

$$|A| = k \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 6k - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 6k - 6 = 0 \Rightarrow k = 1$$

$$\text{Para } k = 1: A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rango de } A: F_2 \leftarrow F_2 - 3 \cdot F_1 = (3-3, 6-6) = (0, 0)$$

$$\text{Forma escalonada: } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A) = 1$$

Comprobación: la fila 2 es exactamente 3 veces la fila 1 $\Rightarrow$ son dependientes $\Rightarrow$ rango 1.

Resultado: $k = 1 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow$ no existe A^{-1} | $\text{rango}(A) = 1$

11. Siendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, resuelve las dos ecuaciones matriciales: a) $A \cdot X = B$ b) $X \cdot A = B$.

Las dos se despejan multiplicando por A^{-1} , pero **por lados distintos**: A^{-1} tiene que entrar por el lado por el que A está pegada a X. Por eso a) da $X = A^{-1} \cdot B$ y b) da $X = B \cdot A^{-1}$. El ejercicio está montado a propósito con la misma A y la misma B para que se vea que los dos resultados son distintos.

Paso previo — la inversa de A, que hace falta en los dos apartados:

$$|A| = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 4 - 3 = 1 \text{ (distinto de 0: existe } A^{-1})$$

$$A^{-1} = (1/1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

a) En $A \cdot X = B$ la matriz A toca a X **por la izquierda**, así que multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en los dos miembros y queda $X = A^{-1} \cdot B$:

$$x_{11} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 2 - 2 = 0$$

$$x_{12} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = 0 - 1 = -1$$

$$x_{21} = (-3) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = -3 + 4 = 1$$

$$x_{22} = (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 0 + 2 = 2$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } A \cdot X = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = B. \text{ Correcto.}$$

b) En $X \cdot A = B$ la matriz A toca a X **por la derecha**, así que ahora A^{-1} entra por la derecha en los dos miembros y queda $X = B \cdot A^{-1}$:

$$x_{11} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) = 2$$

$$x_{12} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -1$$

$$x_{21} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 4 - 3 = 1$$

$$x_{22} = 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 = -2 + 2 = 0$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Comprobación: $X \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = B$. Correcto.

Los dos resultados son distintos, y esa es toda la lección del ejercicio: quien despeje siempre $X = A^{-1} \cdot B$ acertará la mitad de las veces.

Resultado: a) $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ | b) $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcula A^2 y A^3 , deduce la expresión de A^n y utilízala para hallar A^{2027} .

No se puede multiplicar 2027 veces: hay que **buscar el patrón**. Se calculan las dos o tres primeras potencias, se mira qué cambia de una a otra, se escribe la fórmula general y se comprueba en un caso que ya conocemos. Que el enunciado pida A^2 y A^3 antes de pedir A^n es justamente la pista de que el patrón está ahí.

Cálculo de $A^2 = A \cdot A$:

$$a_{11} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1 \quad | \quad a_{12} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

$$a_{21} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \quad | \quad a_{22} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $A^3 = A^2 \cdot A$:

$$a_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1 \quad | \quad a_{12} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

$$a_{21} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \quad | \quad a_{22} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los tres resultados en fila, para ver qué se mueve:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tres de los cuatro elementos no cambian nunca. El único que se mueve es el de arriba a la derecha, y va tomando los valores 1, 2, 3: es exactamente el exponente. De ahí sale la fórmula:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobación de la fórmula en un caso ya calculado (paso que no hay que saltarse: es lo que separa una fórmula deducida de una fórmula adivinada). Sustituimos $n = 3$:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{coincide con lo calculado arriba. (OK)}$$

Ahora ya se puede responder a la potencia grande sustituyendo $n = 2027$:

$$A^{2027} = \begin{bmatrix} 1 & 2027 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultado: $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{2027} = \begin{bmatrix} 1 & 2027 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. a) Comprueba que $|A^t| = |A|$ y que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$. b) Halla la matriz X que cumple $X \cdot A^t = B$.

*En el apartado a) solo hay que aplicar las dos propiedades de la traspuesta y comprobarlas con números, que es como las pregunta el examen. En el b) la incógnita X está multiplicada por A^t **por la derecha**, así que se despeja multiplicando por $(A^t)^{-1}$ por la derecha: $X = B \cdot (A^t)^{-1}$.*

a) La traspuesta de A se obtiene poniendo sus filas como columnas:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1 \quad |A^t| = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1 \rightarrow \text{son iguales. (OK)}$$

Segunda propiedad. Primero el producto $A \cdot B$ y su traspuesta:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B)^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Y ahora el otro miembro, con el orden invertido:

$$B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B es simétrica, coincide con ella misma})$$

$$B^t \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Los dos dan $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$: la propiedad se cumple. Si se hubiera hecho $A^t \cdot B^t$, saldría $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, que no es lo mismo.

b) Como A^t está a la derecha de X , multiplicamos por $(A^t)^{-1}$ por la derecha en los dos miembros:

$|A^t| = 1$, distinto de 0, luego la inversa existe

$$(A^t)^{-1} = (1/1) \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = B \cdot (A^t)^{-1}$$

$$x_{11} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) = 3 \mid x_{12} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -1$$

$$x_{21} = 0 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = -4 \mid x_{22} = 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 2$$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Comprobación: } X \cdot A^t = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & (-4) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = B. \text{ Correcto.}$$

Resultado: a) $|A^t| = |A| = 1$ y $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ | b) $X = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Siguiente sección: 1.2 Sistemas y Programación Lineal — método de Gauss, clasificación por Rouché-Frobenius, sistemas con parámetro y programación lineal. Con ejercicios resueltos de PAU.