

Bloque 1

Campo Gravitatorio

Apuntes completos para la PAU: teoría con notación vectorial, derivaciones formales, once diagramas y treinta y tres ejercicios tipo PAU resueltos.

Contenido

1.1 Ley de Gravitación Universal

Fuerza entre masas, notación vectorial PAU, variación de g con la altura

1.2 Campo Gravitatorio y Potencial

Intensidad de campo, potencial, energía potencial, trabajo

1.3 Movimiento Orbital y Satélites

Kepler, velocidad orbital, conservación de energía, velocidad de escape, momento angular, cosmología

Apuntes de preparación para la PAU · 2.º de Bachillerato

Ejemplar de muestra gratuito, igual para todos. Prohibida su venta o redistribución sin permiso escrito del titular.

© 2026 PAUmode. Todos los derechos reservados. Queda prohibida la reproducción total o parcial, la distribución, la comunicación pública y la transformación de esta obra sin autorización escrita del titular. El incumplimiento podrá dar lugar a las acciones civiles y penales previstas en la legislación sobre propiedad intelectual.

1.1 Ley de Gravitación Universal

El Bloque 1 se divide en: **1.1 Ley de Gravitación Universal** · 1.2 Campo Gravitatorio y Potencial · 1.3 Movimiento Orbital y Satélites.

1.1.1 · Módulo de la fuerza gravitatoria

Cualquier par de masas se atrae. El módulo de la fuerza es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$F = G \cdot M \cdot m / r^2$$

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

Variables: M = masa grande (planeta, estrella). m = masa pequeña (satélite, objeto). r = distancia entre centros de masa en metros.

1.1.2 · Notación vectorial — obligatoria en la PAU

PAU — Atención. Un resultado que solo da el módulo está incompleto y pierde parte de la puntuación del apartado. Basta con indicar la dirección y el sentido en la respuesta final.

Forma vectorial: $F = -(G \cdot M \cdot m / r^2) \cdot u_r$

u_r = vector unitario radial (de M hacia m)

El signo (-) indica fuerza **ATRACTIVA**: apunta hacia M, contraria a u_r .

Texto modelo para el examen: "La fuerza gravitatoria es atractiva y se dirige según la recta que une los centros de masa, apuntando hacia M."

1.1.3 · Aceleración de la gravedad g en la superficie

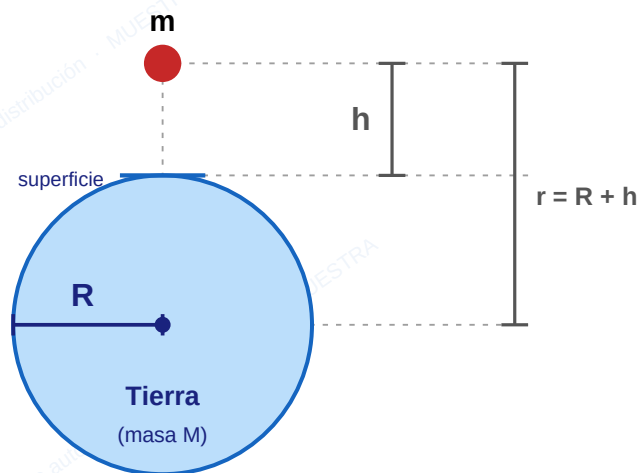
Igualando $F = G \cdot M \cdot m / R^2$ con el peso $P = m \cdot g$, la masa m se cancela y g queda expresada solo en función del planeta:

$$g = G \cdot M / R^2 \text{ (en la superficie, } R = \text{radio del planeta)}$$

$$\text{Tierra: } M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg, } R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \Rightarrow g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$$

g no depende de la masa del objeto: una pluma y un martillo caen igual en ausencia de aire. El peso sí depende de m : $P = m \cdot g$.

1.1.4 · Variación de g con la altura



Las líneas de puntos son referencias: llevan el centro, la superficie y el satélite hasta las cotas.

Figura 1 — La distancia que entra en la fórmula es r , medida desde el **centro** del planeta: $r = R + h$. La altura h se mide desde la superficie.

$$g_h = G \cdot M / r^2 = g_0 \cdot R^2 / r^2$$

$$\text{Regla rápida: } n = r/R \Rightarrow g_h = g_0 / n^2$$

Truco. Pasos: (1) $r = R + h$. (2) $n = r/R$. (3) $g = g_0/n^2$. Ejemplo: $h = 2R \Rightarrow r = 3R \Rightarrow n = 3 \Rightarrow g = g_0/9 = 1,09 \text{ m/s}^2$.

Error típico. Confundir h con r . Si $h = R$, entonces $r = R + R = 2R$, no $r = R$.

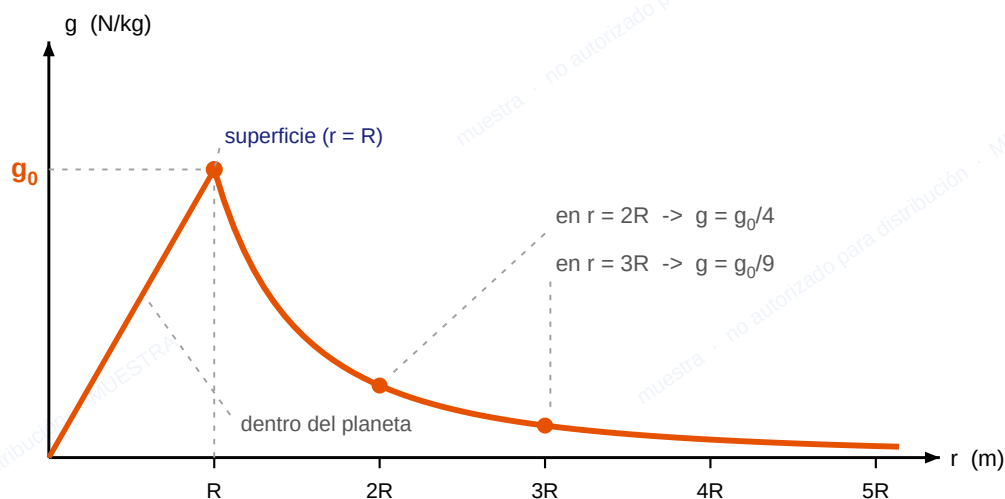


Figura 2 — g frente a la distancia al centro. Fuera del planeta cae con $1/r^2$: al doblar la distancia se queda en $g_0/4$, y al triplicarla en $g_0/9$. El valor máximo está en la superficie.

Ejercicios — Sección 1.1

Diez ejercicios tipo PAU. En rojo: la clave del problema. A continuación, la solución completa paso a paso.

- 1. Dos esferas de masas $M = 2.500 \text{ kg}$ y $m = 1.500 \text{ kg}$ tienen sus centros separados $r = 0,4 \text{ m}$. Calcula la fuerza gravitatoria entre ellas. [Tipo PAU]**

Sustitución directa en la ley de Newton. El único cuidado es elevar r al cuadrado antes de dividir.

Partimos de la fórmula y sustituimos los tres datos:

$$F = G \cdot M \cdot m / r^2 = (6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 2.500 \cdot 1.500) / (0,4)^2$$

$$F = 2,503 \cdot 10^{-4} / 0,16 = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

La fuerza es atractiva y actúa a lo largo de la recta que une los centros.

Resultado: $F = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ N}$, atractiva.

2. La Luna tiene $M = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg y $R = 1,74 \cdot 10^6$ m. Calcula la aceleración de la gravedad en su superficie. [Tipo PAU]

La fórmula $g = G \cdot M/R^2$ es universal: vale para cualquier cuerpo celeste, no solo la Tierra.

Sustituimos los datos de la Luna en $g = G \cdot M/R^2$:

$$g = (6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}) / (1,74 \cdot 10^6)^2$$

$$g = 4,905 \cdot 10^{12} / 3,028 \cdot 10^{12} = 1,62 \text{ m/s}^2$$

Es aproximadamente $g/6$, lo que explica los saltos espectaculares de los astronautas.

Resultado: $g_{\text{Luna}} = 1,62 \text{ m/s}^2$.

3. Calcula la fuerza gravitatoria Tierra-Luna. $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, $M_L = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, $d = 3,84 \cdot 10^8$ m. [Tipo PAU]

Igual que el ejercicio 1, pero con masas gigantes. Se calcula numerador y denominador por separado para controlar las potencias de 10.

Numerador: multiplicamos las tres constantes y sumamos los exponentes de 10:

$$6,674 \cdot 5,97 \cdot 7,35 \cdot 10^{-11+24+22} = 292,8 \cdot 10^{35} = 2,928 \cdot 10^{37}$$

Denominador: $(3,84 \cdot 10^8)^2 = 14,75 \cdot 10^{16} = 1,475 \cdot 10^{17}$

$$F = 2,928 \cdot 10^{37} / 1,475 \cdot 10^{17} = 1,99 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

Resultado: $F = 1,99 \cdot 10^{20}$ N. Es la fuerza que mantiene a la Luna en órbita.

4. g en Marte es $3,71 \text{ m/s}^2$ y su radio $R = 3,39 \cdot 10^6$ m. Calcula el peso de $m = 75$ kg en Marte y la masa del planeta. [Tipo PAU]

Dos preguntas diferentes: el peso se calcula con $P = m \cdot g$, y la masa del planeta se despeja de $g = G \cdot M/R^2$.

Peso en Marte (directo):

$$P = m \cdot g = 75 \cdot 3,71 = 278 \text{ N}$$

Masa de Marte — despejamos M de $g = G \cdot M/R^2 \Rightarrow M = g \cdot R^2/G$:

$$M = (3,71 \cdot (3,39 \cdot 10^6)^2) / 6,674 \cdot 10^{-11}$$

$$M = (3,71 \cdot 1,149 \cdot 10^{13}) / 6,674 \cdot 10^{-11} = 6,39 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

Resultado: $P = 278 \text{ N}$ y $M_{\text{Marte}} = 6,39 \cdot 10^{23} \text{ kg}$.

5. ¿A qué altura sobre la superficie terrestre vale $g = g_0/2$? $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$. [Tipo PAU]

Igualemos $g_0 \cdot R^2/r^2 = g_0/2$ y despejamos r . Luego $h = r - R$.

De la condición $g_0/r^2 \cdot R^2 = g_0/2 \Rightarrow r^2 = 2R^2 \Rightarrow r = R \cdot \sqrt{2}$:

$$r = 6,37 \cdot 10^6 \cdot 1,414 = 9,01 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Altura sobre la superficie:

$$h = r - R = 9,01 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 = 2,64 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Resultado: $h = 2,64 \cdot 10^6 \text{ m} = 2.640 \text{ km}$.

6. Un planeta tiene $g = 5 \text{ m/s}^2$ en su superficie y radio $R = 5 \cdot 10^6 \text{ m}$. Calcula su masa. [Tipo PAU]

Despejar M de $g = G \cdot M/R^2$. Una sustitución directa.

Despejamos M y sustituimos:

$$M = g \cdot R^2 / G = (5 \cdot (5 \cdot 10^6)^2) / 6,674 \cdot 10^{-11}$$

$$M = 1,25 \cdot 10^{14} / 6,674 \cdot 10^{-11} = 1,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Resultado: $M = 1,87 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

7. Fuerza gravitatoria Tierra-Sol. $M_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $d = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$. [Tipo PAU]

Misma fórmula que el ejercicio 3. El truco es separar numerador y denominador para manejar los exponentes de 10 con comodidad.

$$\text{Numerador: } 6,674 \cdot 1,99 \cdot 5,97 \cdot 10^{-11+30+24} = 79,29 \cdot 10^{43} = 7,929 \cdot 10^{44}$$

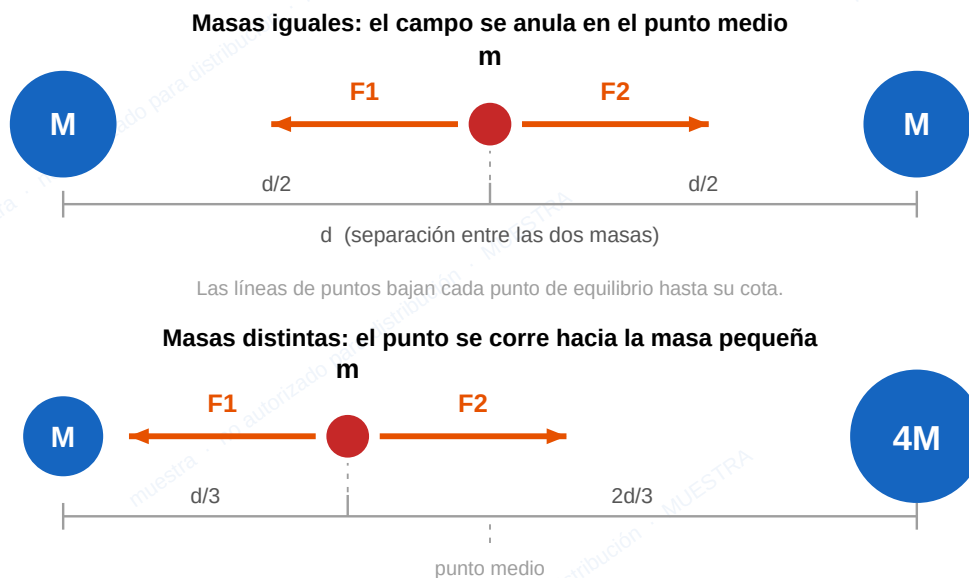
$$\text{Denominador: } (1,50)^2 \cdot 10^{22} = 2,25 \cdot 10^{22}$$

$$F = 7,929 \cdot 10^{44} / 2,25 \cdot 10^{22} = 3,52 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

Resultado: $F = 3,52 \cdot 10^{22} \text{ N}$.

8. Dos planetas de igual masa M están separados una distancia d . ¿En qué punto de la recta que los une es nula la fuerza neta sobre m ? [Tipo PAU]

El campo gravitatorio es vectorial: cada planeta ejerce una fuerza sobre m en sentidos contrarios. Solo donde los módulos se igualan hay equilibrio.



En cada dibujo las dos flechas miden lo mismo: en el punto de equilibrio los dos módulos se igualan.

Figura 3 — Arriba, con dos masas iguales el equilibrio cae en el punto medio. Abajo, con M y $4M$ el punto se corre hasta $d/3$ de la masa pequeña: hace falta acercarse más a ella para que su campo iguale al de la grande.

Como las dos masas M son idénticas, el punto de equilibrio está exactamente a $d/2$ de cada una. Ahí $|F_1| = G \cdot M \cdot m / (d/2)^2 = |F_2|$, los vectores se cancelan y la fuerza neta es cero.

Resultado: Fuerza neta = 0 en el punto medio, a $d/2$ de cada masa.

9. Un satélite orbita a $h = 2 \cdot R_T$. Calcula g en su posición. $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$. [Tipo PAU]

Usar la regla rápida de n : $r = R + 2R = 3R$, de modo que $n = 3$.

La distancia al centro es $r = R + h = R + 2R = 3R \Rightarrow n = r/R = 3$.

$$g = g_0 / n^2 = 9,8 / 9 = 1,09 \text{ m/s}^2$$

A tres radios del centro, la gravedad es nueve veces menor que en la superficie.

Resultado: $g = 1,09 \text{ m/s}^2$.

10. Un planeta tiene el doble de masa y el doble de radio que la Tierra. Calcula g superficial y el peso de un astronauta de $m = 60 \text{ kg}$. [Tipo PAU]

Sustituir $M_p = 2M$ y $R_p = 2R$ en la fórmula de g y simplificar antes de calcular.

Sustituimos $M_p = 2M$ y $R_p = 2R$ en $g = G \cdot M/R^2$:

$$g_p = G \cdot (2M) / (2R)^2 = G \cdot 2M / 4R^2 = (G \cdot M/R^2) / 2 = g_0/2$$

$$g_p = 9,8 / 2 = 4,9 \text{ m/s}^2$$

Peso del astronauta en ese planeta:

$$P = m \cdot g_p = 60 \cdot 4,9 = 294 \text{ N}$$

Aunque el planeta es más masivo, el mayor radio compensa y la gravedad queda a la mitad.

Resultado: $g_p = 4,9 \text{ m/s}^2$; $P = 294 \text{ N}$.

Siguiente: 1.2 Campo Gravitatorio y Potencial.

1.2 Campo Gravitatorio y Potencial

1.1 Ley de Gravitación Universal · **1.2 Campo Gravitatorio y Potencial** · 1.3 Movimiento Orbital y Satélites.

1.2.1 · Intensidad del campo gravitatorio

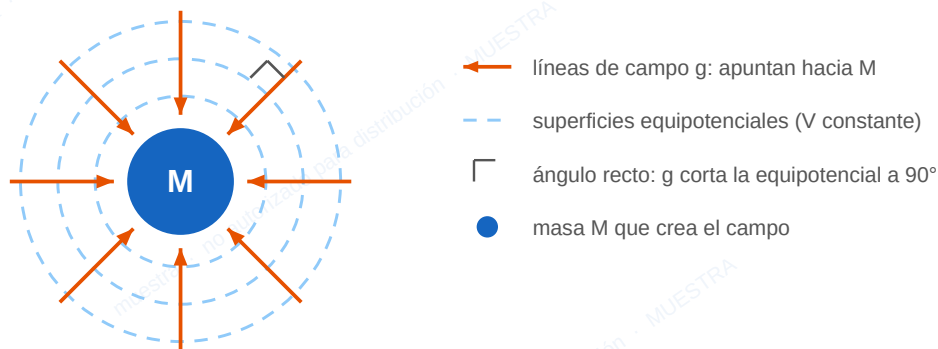
El campo gravitatorio en un punto es la fuerza por unidad de masa. Es vectorial y no depende de la masa de prueba m :

Módulo: $g = F / m = G \cdot M / r^2$ ($\text{N/kg} = \text{m/s}^2$)

Forma vectorial: $g = -(G \cdot M / r^2) \cdot u_r$

Signo (-): el campo apunta siempre HACIA M (campo atractivo).

Con varias masas: $g_{\text{total}} = \text{suma VECTORIAL de cada } g \text{ individual.}$



Mover una masa a lo largo de una equipotencial no cuesta trabajo: el potencial no cambia.

Figura 4 — Las líneas de campo y las equipotenciales se cortan en ángulo recto.

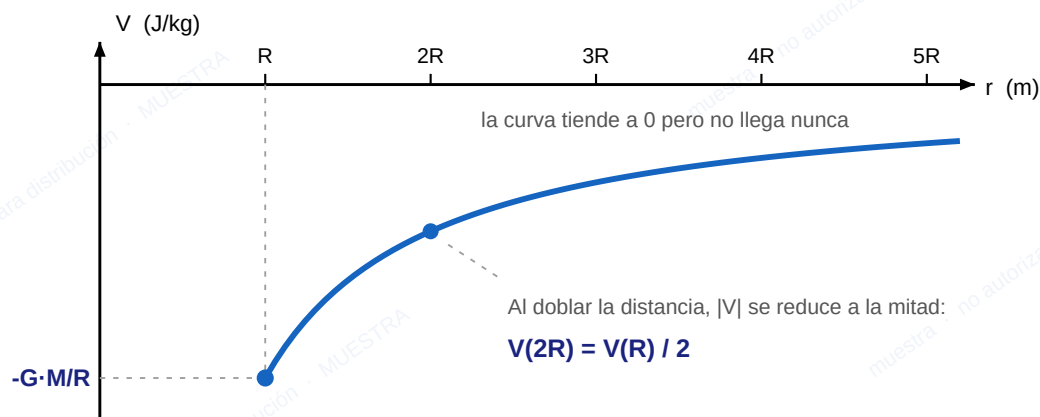
1.2.2 · Potencial gravitatorio

El potencial es la energía potencial por unidad de masa. A diferencia del campo, es una magnitud escalar:

$$V = -G \cdot M / r \text{ (J/kg)}$$

Siempre **NEGATIVO** (referencia: $V = 0$ en $r = \text{infinito}$).

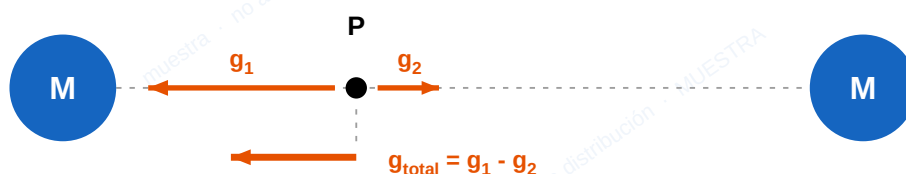
Con varias masas: $V_{\text{total}} = V_1 + V_2 + \dots$ (suma algebraica, no vectorial).



V es negativo en todo punto: las líneas de puntos llevan el valor de la superficie a los dos ejes.

Figura 5 — La curva entera queda por debajo del eje: V es negativo siempre. Su valor más negativo está en la superficie y sube hacia cero al alejarnos.

Error típico. Escribir $V = +G \cdot M / r$ sin el signo negativo. El potencial gravitatorio es siempre negativo.



En ese mismo punto P el potencial no es un vector, es un número:

$$V(P) = V_1 + V_2 \text{ (los dos negativos: se suman)}$$

Las líneas de puntos son la recta que une las masas y la vertical de P . P está más cerca de la masa de la izquierda, así que g_1 es mayor.

Figura 6 — Arriba, los dos campos se restan porque son vectores opuestos. Abajo, los dos potenciales se suman porque son números negativos.

1.2.3 · Energía potencial y trabajo

$$E_p = m \cdot V = -G \cdot M \cdot m / r$$

$$W_{\text{ext}} \text{ (agente externo que mueve } m \text{ de } r_1 \text{ a } r_2) = E_p(r_2) - E_p(r_1)$$

$$W_{\text{grav}} \text{ (fuerza gravitatoria)} = E_p(r_1) - E_p(r_2)$$

$$\text{Energía de enlace (para llevar } m \text{ al infinito): } W_{\text{ext}} = G \cdot M \cdot m / r = |E_p|$$

Truco. W externo = E_p final - E_p inicial. Si m sube (r aumenta): $W > 0$. Si m baja: $W < 0$.

Error típico. Usar $W = F \cdot d$ para grandes alturas. La fuerza varía con r^2 , solo vale $W =$ diferencia de E_p .

Ejercicios — Sección 1.2

Diez ejercicios de campo y potencial. El potencial y la energía potencial son siempre negativos.

1. Calcula el potencial gravitatorio en la superficie de la Tierra. [Tipo PAU]

Sustitución directa en $V = -G \cdot M / R$. El resultado tiene que ser negativo; si sale positivo hay un error de signo.

$$V = -(6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}) / 6,37 \cdot 10^6$$

$$V = -3,984 \cdot 10^{14} / 6,37 \cdot 10^6 = -6,25 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$

Este valor significa que hay que aportar $6,25 \cdot 10^7 \text{ J}$ por cada kilogramo para escapar de la Tierra.

Resultado: $V = -6,25 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$.

2. Un satélite de $m = 200 \text{ kg}$ orbita a $h = 400 \text{ km}$. Calcula su energía potencial. [Tipo PAU]

Primero $r = R + h$ (en metros), luego $E_p = -G \cdot M \cdot m / r$.

$$\text{Distancia al centro: } r = 6,37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 = 6,77 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$E_p = -(3,984 \cdot 10^{14} \cdot 200) / 6,77 \cdot 10^6$$

$$E_p = -7,968 \cdot 10^{16} / 6,77 \cdot 10^6 = -1,18 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Resultado: $E_p = -1,18 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

3. Calcula el trabajo mínimo para elevar $m = 500 \text{ kg}$ desde la superficie hasta $h = 2 \cdot R_T$.
[Tipo PAU]

$W = E_p(\text{final}) - E_p(\text{inicial})$. Con $h = 2R$, la distancia final al centro es $3R$.

Calculamos E_p en los dos puntos (usamos $G \cdot M_T = 3,984 \cdot 10^{14}$):

$$E_{p1} = -(3,984 \cdot 10^{14} \cdot 500) / 6,37 \cdot 10^6 = -3,127 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$E_{p2} = -(3,984 \cdot 10^{14} \cdot 500) / (3 \cdot 6,37 \cdot 10^6) = -1,042 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Trabajo del agente externo (positivo porque m sube):

$$W = E_{p2} - E_{p1} = -1,042 \cdot 10^{10} + 3,127 \cdot 10^{10} = 2,085 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Resultado: $W_{\text{ext}} = 2,085 \cdot 10^{10} \text{ J}$.

4. El potencial en cierto punto es $V = -4,80 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$. ¿A qué altura está ese punto? [Tipo PAU]

Despejar r de $V = -G \cdot M/r \Rightarrow r = G \cdot M/|V|$. Luego $h = r - R_T$

$$r = (6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}) / 4,80 \cdot 10^7$$

$$r = 3,984 \cdot 10^{14} / 4,80 \cdot 10^7 = 8,30 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Altura sobre la superficie: $h = r - R_T = 8,30 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6$

$$h = 1,93 \cdot 10^6 \text{ m} = 1.930 \text{ km}$$

Resultado: $h = 1,93 \cdot 10^6 \text{ m}$.

5. Calcula la intensidad del campo gravitatorio a $r = 3 \cdot R_T$ del centro. [Tipo PAU]

Regla rápida: $n = r/R = 3$, luego $g = g_0/n^2$.

$$g = g_0 / n^2 = 9,8 / 3^2 = 9,8 / 9 = 1,09 \text{ m/s}^2$$

Ese punto está a $h = 2R = 12.740 \text{ km}$ sobre la superficie.

Resultado: $g = 1,09 \text{ m/s}^2$.

6. Calcula la diferencia de potencial entre la superficie y un punto a $h = R_T/2$. [Tipo PAU]

$\Delta V = V(r_2) - V(r_1)$. El punto más alejado tiene el potencial menos negativo, es decir, mayor.

V en la superficie ($r_1 = R_T$): $V_1 = -6,25 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$

$r_2 = R_T + R_T/2 = 1,5 \cdot R_T = 9,555 \cdot 10^6 \text{ m}$:

$$V_2 = -(3,984 \cdot 10^{14}) / 9,555 \cdot 10^6 = -4,17 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -4,17 \cdot 10^7 + 6,25 \cdot 10^7 = +2,08 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$

Resultado: $\Delta V = +2,08 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$.

7. Trabajo de la fuerza gravitatoria al desplazar $m = 100 \text{ kg}$ desde $r = 2 \cdot R_T$ hasta $r = R_T$. [Tipo PAU]

$W_{\text{grav}} = E_p(\text{inicial}) - E_p(\text{final})$. El objeto se acerca a la Tierra, así que la gravedad hace trabajo positivo.

$$E_p(2R_T) = -(3,984 \cdot 10^{14} \cdot 100) / (2 \cdot 6,37 \cdot 10^6) = -3,127 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_p(R_T) = -(3,984 \cdot 10^{14} \cdot 100) / 6,37 \cdot 10^6 = -6,255 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Trabajo de la fuerza gravitatoria (E_p inicial menos E_p final):

$$W_{\text{grav}} = -3,127 \cdot 10^9 + 6,255 \cdot 10^9 = +3,128 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Resultado: $W_{\text{grav}} = +3,128 \cdot 10^9 \text{ J}$.

8. Calcula la velocidad de escape desde la superficie de la Luna. $M = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, $R = 1,74 \cdot 10^6$ m. [Tipo PAU]

Condición de escape: la energía total vale cero. De ahí sale $v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM/R}$.

Igualemos energía cinética y energía de enlace: $(1/2)mv^2 = G \cdot M \cdot m/R \Rightarrow v^2 = 2GM/R$

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} / 1,74 \cdot 10^6}$$

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{5,638 \cdot 10^6} = 2.374 \text{ m/s} = 2,37 \text{ km/s}$$

Mucho menor que los 11,2 km/s de la Tierra: la Luna tiene menos masa y menor radio.

Resultado: $v_{\text{esc}} = 2,37 \text{ km/s}$.

9. Calcula el potencial en el punto medio entre la Tierra y la Luna. $d = 3,84 \cdot 10^8$ m. [Tipo PAU]

El potencial es escalar: $V_{\text{total}} = V_T + V_L$. Cada astro está a $d/2$ del punto medio.

Cada astro queda a $r = d/2 = 1,92 \cdot 10^8$ m del punto:

$$V_T = -(3,984 \cdot 10^{14}) / 1,92 \cdot 10^8 = -2,075 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

$$V_L = -(6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}) / 1,92 \cdot 10^8 = -2,55 \cdot 10^4 \text{ J/kg}$$

Suma algebraica (no vectorial, porque el potencial es escalar):

$$V_{\text{total}} = -2,075 \cdot 10^6 + (-2,55 \cdot 10^4) = -2,10 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$$

La contribución de la Tierra domina: es unas 80 veces mayor que la de la Luna.

Resultado: $V_{\text{total}} = -2,10 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$.

10. Calcula la energía mínima para llevar $m = 1.000$ kg desde la superficie terrestre hasta el infinito. [Tipo PAU]

$W_{\text{ext}} = E_p(\text{infinito}) - E_p(R)$. Como E_p en el infinito vale cero, queda $W = G \cdot M \cdot m/R$.

$$W_{\text{ext}} = G \cdot M_T \cdot m / R_T = (3,984 \cdot 10^{14} \cdot 1.000) / 6,37 \cdot 10^6$$

$$W_{\text{ext}} = 3,984 \cdot 10^{17} / 6,37 \cdot 10^6 = 6,25 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Es la energía de enlace del sistema: lo que "ata" m a la Tierra.

Resultado: $W_{\text{ext}} = 6,25 \cdot 10^{10} \text{ J}.$

Siguiente: 1.3 Movimiento Orbital y Satélites.

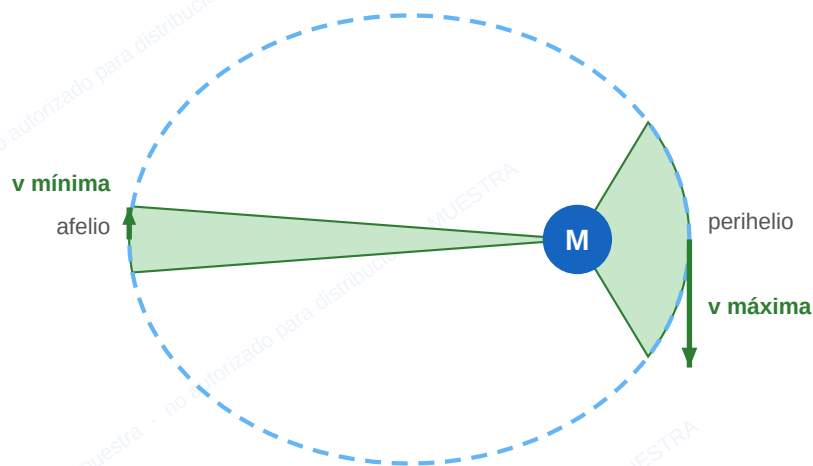
1.3 Movimiento Orbital y Satélites

1.1 Ley de Gravitación Universal · 1.2 Campo Gravitatorio y Potencial · **1.3 Movimiento Orbital y Satélites.**

1.3.1 · Leyes de Kepler

1.^a ley (elipses): Los planetas orbitan en elipses con el cuerpo central en un foco. En muchos casos la excentricidad es pequeña y la órbita es casi circular.

2.^a ley (áreas iguales): El radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. El planeta va más rápido en el perihelio y más lento en el afelio. Equivale a la conservación del momento angular (se demuestra en 1.3.5).



Las dos zonas verdes tienen la misma área: el planeta las barre en el mismo tiempo.

La línea a trazos azul es la órbita; el Sol (M) ocupa uno de los focos de la elipse.

Figura 7 — La 2.^a ley dibujada: cerca del Sol el sector barrido es corto y ancho; lejos, largo y estrecho. Las dos superficies verdes son iguales, y por eso el planeta pasa más deprisa por el perihelio que por el afelio.

3.ª ley (periodos):

$$T^2 / r^3 = 4 \cdot \pi^2 / (G \cdot M) = \text{constante del sistema}$$

Para dos cuerpos orbitando el mismo M:

$$T_1^2 / r_1^3 = T_2^2 / r_2^3$$

M y G se cancelan — no hace falta conocerlos para comparar periodos.

Truco. Si r se multiplica por n, T se multiplica por $n^{3/2}$. Ejemplo: r cuádruplica ($n = 4$) => T se multiplica por $4^{3/2} = 8$.

1.3.2 · Velocidad orbital — derivación formal

En órbita circular la gravedad hace la función de fuerza centrípeta. Igualando las dos expresiones:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \Rightarrow v_{\text{orb}} = \sqrt{G \cdot M / r}$$

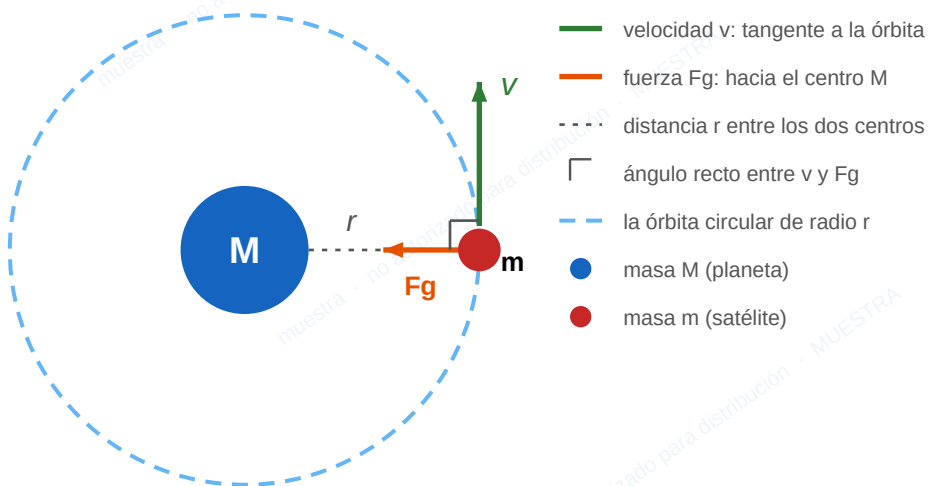


Figura 8 — En la órbita circular, v es tangente y Fg apunta al centro en todo momento: las dos forman ángulo recto, marcado con la escuadra junto al satélite. La distancia r se mide de centro a centro, no desde la superficie.

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{G \cdot M / r}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot r / v_{\text{orb}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{r^3 / G \cdot M}$$

Ni v ni T dependen de la masa del satélite m .

A mayor r : v_{orb} decrece (va más lento) pero T crece (tarda más en dar la vuelta).

Órbita geoestacionaria: $T = 24 \text{ h} \Rightarrow r = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$. El satélite permanece fijo sobre el ecuador.

Error típico. Pensar que un satélite más masivo orbita más rápido. La masa m se cancela; v_{orb} no depende de m .

1.3.3 · Conservación de la energía mecánica

Campo conservativo. El campo gravitatorio es conservativo: $E_{\text{total}} = E_c + E_p$ se conserva en ausencia de rozamiento. Permite calcular velocidades en cambios de órbita y la velocidad de escape.

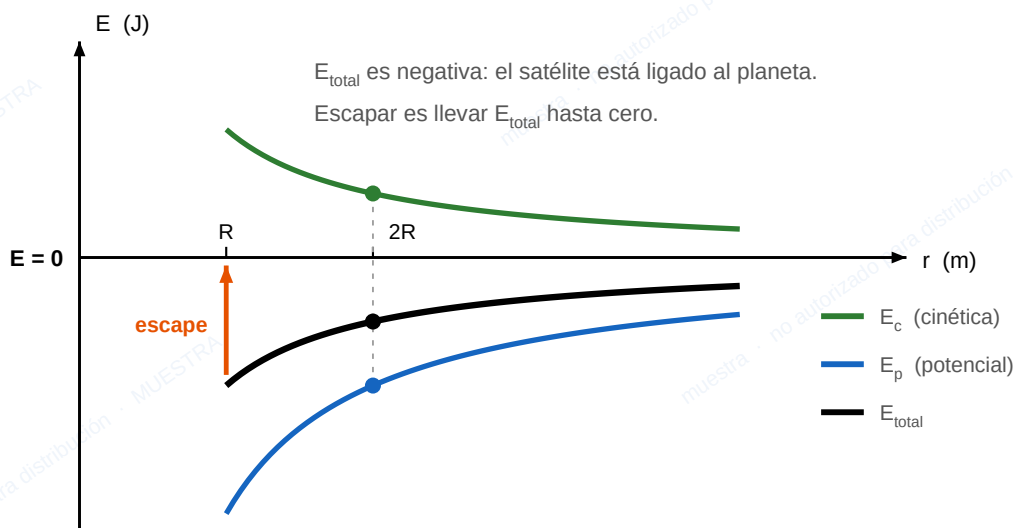
En órbita circular (usando $v^2 = G \cdot M / r$):

$$E_c = G \cdot M \cdot m / (2r)$$

$$E_p = -G \cdot M \cdot m / r$$

$$E_{\text{total}} = -G \cdot M \cdot m / (2r) \text{ (siempre negativa)}$$

$$\text{Relaciones rápidas: } E_c = -E_{\text{total}} \text{ y } E_p = 2 \cdot E_{\text{total}}$$



La línea de puntos une las tres energías en $r = 2R$: ahí se ve que $E_c = -E_{total}$ y que $E_p = 2 \cdot E_{total}$.

Figura 9 — Las tres energías de un satélite según el radio de su órbita. E_c es positiva, E_p es el doble de grande y negativa, y la suma queda siempre por debajo del eje: mientras E total sea negativa, el satélite no puede escapar.

1.3.4 · Velocidad de escape

Velocidad mínima para abandonar el campo. Condición: $E_{total} = 0$ (llega al infinito con $v = 0$):

$$(1/2) \cdot m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M / r}$$

$$v_{esc} = \sqrt{2 \cdot G \cdot M / r} = \sqrt{2} \cdot v_{orb}$$

Tierra (desde la superficie): $v_{esc} = 11,2 \text{ km/s}$

Truco. $v_{esc} = \sqrt{2} \cdot v_{orb}$ siempre. Si calculas v_{orb} primero, multiplica por 1,41 para obtener v_{esc} .

Error típico. Creer que v_{esc} es mayor a mayor altura. Al contrario: $v_{esc} = \sqrt{2GM/r}$ disminuye al alejarse. Es más fácil escapar desde lejos.

1.3.5 · Momento angular y su conservación

El momento angular de una masa m respecto al centro O del astro es el producto vectorial de su vector de posición r (medido desde O) por su cantidad de movimiento $m \cdot v$:

$$L = r \times m \cdot v \text{ (unidad: kg} \cdot \text{m}^2/\text{s)}$$

$$|L| = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha \text{ } (\alpha = \text{ángulo entre } r \text{ y } v)$$

Dirección: perpendicular al plano que forman r y v . **Sentido:** regla de la mano derecha.

Por qué se conserva. Al derivar L respecto del tiempo, el término $v \times m \cdot v$ es nulo (un vector por sí mismo) y queda solo el momento de la fuerza: $dL/dt = r \times F$. La fuerza gravitatoria es **central**: apunta siempre hacia O , sobre la misma recta que r . El producto vectorial de dos vectores paralelos vale cero, así que $r \times F = 0$ y L no cambia, ni en módulo ni en dirección.

Primera consecuencia: como la dirección de L es fija, la órbita está siempre en el mismo plano.

Segunda consecuencia, la 2.ª ley de Kepler: en un tiempo dt el radio vector barre un triángulo de área $dA = \frac{1}{2} \cdot r \cdot v \cdot dt \cdot \sin \alpha$. Dividiendo entre dt sale $dA/dt = |L| / (2m)$, que es constante. Esa constante se llama **velocidad areolar**: la ley de las áreas es la conservación del momento angular.

Tercera consecuencia: en el perihelio y en el afelio r y v son perpendiculares ($\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$), y la conservación se escribe con módulos sin ningún seno.

Velocidad areolar: $dA/dt = |L| / (2m) = \text{constante}$

$$\text{Perihelio y afelio: } m \cdot r_p \cdot v_p = m \cdot r_a \cdot v_a \Rightarrow r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$$

$$\text{Órbita circular } (\alpha = 90^\circ \text{ siempre): } |L| = m \cdot r \cdot v = m \cdot \sqrt{G \cdot M \cdot r}$$

Truco. $r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$ solo vale en el perihelio y en el afelio, donde v es perpendicular a r . En cualquier otro punto hay que conservar el seno: $r_1 \cdot v_1 \cdot \sin \alpha_1 = r_2 \cdot v_2 \cdot \sin \alpha_2$. La masa m se cancela: no hace falta para calcular velocidades.

Error típico. Creer que si L se conserva, la velocidad también. En una órbita elíptica L es constante y v no: el producto $r \cdot v$ se mantiene, así que v crece cuando r disminuye. Solo en la órbita circular, con r fija, es constante el módulo de v .

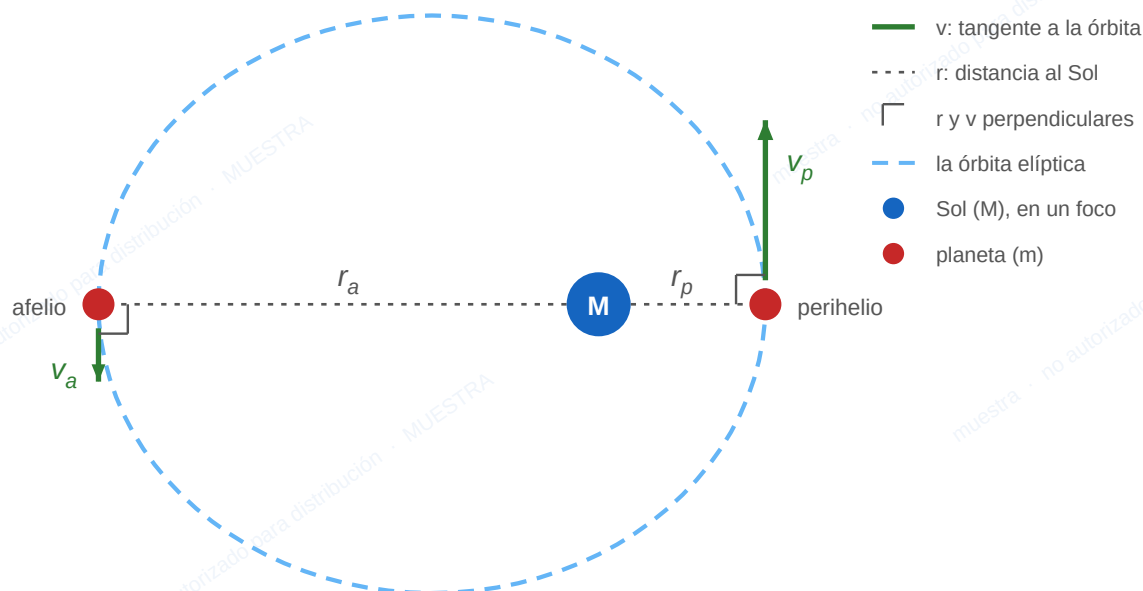


Figura 10 — En los dos extremos del eje mayor, r y v forman ángulo recto. Como el producto $r \cdot v$ es el mismo en los dos puntos, donde r es pequeña v es grande: en el dibujo r_a es tres veces r_p y la flecha de v_p es tres veces la de v_a . L es perpendicular al papel.

PAU — Atención. L es un vector. Si piden «el momento angular», hay que dar el módulo, la dirección (perpendicular al plano de la órbita) y el sentido (regla de la mano derecha). Y r se mide desde el centro del astro, no desde su superficie.

1.3.6 · Cosmología: Big Bang, expansión y materia oscura

La gravedad que mueve satélites y planetas también explica cómo es el universo a gran escala. Es contenido de cuestión teórica: hay que saber **describirlo** con palabras, y la cuenta que puede caer es la de la materia oscura, que es la misma que la de la velocidad orbital.

El Big Bang. El universo empezó hace unos 13.800 millones de años en un estado muy caliente y muy denso, y desde entonces se expande y se enfría. No fue una explosión en un punto del espacio: lo que crece es el propio espacio, y las galaxias se separan unas de otras porque el espacio entre ellas se estira. Tres observaciones lo sostienen:

1. La expansión (ley de Hubble). En 1929 Hubble comprobó que las galaxias lejanas se alejan de nosotros, y que lo hacen más deprisa cuanto más lejos están: su luz llega desplazada hacia el rojo. Lemaître lo había deducido en 1927, y por eso hoy se llama también ley de Hubble-Lemaître.

2. La radiación de fondo de microondas. Unos 380.000 años después del Big Bang se formaron los primeros átomos y la luz pudo viajar libre. Esa luz nos llega hoy de todas las direcciones por igual, enfriada por la expansión hasta unos 2,7 K.

3. Los elementos ligeros. En los primeros minutos solo dio tiempo a formar los núcleos más ligeros: alrededor de un 75 % de hidrógeno y un 25 % de helio en masa, con trazas de litio. Es lo que se mide en el gas y en las estrellas más antiguas.

Ley de Hubble: $v = H_0 \cdot d$

$H_0 = 70$ km/s por megaparsec, aproximadamente

$1 \text{ Mpc} = 3,09 \cdot 10^{22} \text{ m} = 3,26$ millones de años luz

Ejemplo: una galaxia a $d = 100 \text{ Mpc}$ se aleja a $v = 70 \cdot 100 = 7.000 \text{ km/s}$

La materia oscura. Es una aplicación directa del apartado 1.3.2. Una estrella del borde de una galaxia gira alrededor del centro como un satélite, con $v = \sqrt{G \cdot M/r}$, donde M es la masa que queda dentro de su órbita. Si casi toda la masa estuviera en lo que se ve, que se concentra en el centro, las estrellas lejanas deberían ir más despacio cuanto más lejos. En los años setenta Vera Rubin midió que no: la velocidad se mantiene casi constante hasta el borde. Despejando $M = v^2 \cdot r / G$ sale mucha más masa de la que se ve. Esa masa que atrae pero no emite luz se llama **materia oscura**, y todavía no se sabe de qué está hecha.

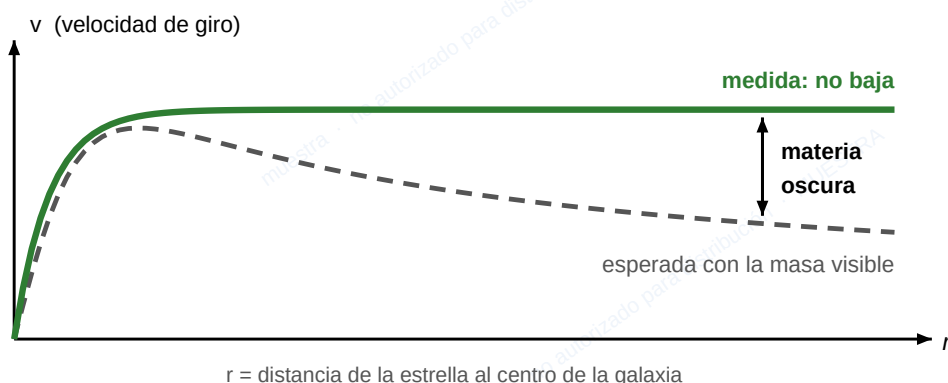


Figura 11 — Velocidad de giro de las estrellas de una galaxia según su distancia al centro. Con solo la masa visible, la velocidad debería caer (línea gris a trazos); la medida (verde) se queda plana. La diferencia la pone una masa que no se ve: la materia oscura.

La energía oscura. En 1998, dos equipos que observaban supernovas lejanas las encontraron más débiles de lo esperado, es decir, más lejos de lo que se había calculado. La explicación es que la expansión **se está acelerando**. Lo que la acelera se llama energía oscura, y tampoco se sabe qué es.

De qué está hecho el universo (misión Planck, 2013):

Materia ordinaria (átomos): 5 %

Materia oscura: 27 %

Energía oscura: 68 %

Truco. $M = v^2 \cdot r / G$ es la misma cuenta que da la masa de un planeta a partir de la órbita de su satélite, o la del agujero negro del centro de una galaxia a partir de las estrellas que giran cerca de él. Si la velocidad medida es el doble de la esperada, la masa es el cuádruple: la velocidad va al cuadrado.

Error típico. Confundir materia oscura con energía oscura. La materia oscura **atrae**: se detecta por su gravedad, que hace girar las galaxias más deprisa. La energía oscura hace lo contrario: **acelera la expansión**. Y el Big Bang no fue una explosión desde un centro: el universo no tiene centro, se estira por igual en todas partes.

PAU — Atención. Murcia lo pide con estas palabras: describir la teoría del Big Bang, la expansión del universo, la materia y la energía oscuras. Valencia pide además deducir la materia oscura a partir de la velocidad de rotación de una galaxia, con la cuenta de la velocidad orbital (ejercicio 13).

Ejercicios — Sección 1.3

Doce ejercicios de movimiento orbital y uno de materia oscura. Para cada uno se indica la fórmula clave y de dónde sale.

1. La ISS orbita a $h = 400$ km. Calcula su velocidad orbital. [Tipo PAU]

Usar $v_{orb} = \sqrt{G \cdot M / r}$ con $r = R_T + h$. La masa de la ISS no aparece en la fórmula.

$$r = R_T + h = 6,37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 = 6,77 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$v = \sqrt{G \cdot M_T / r} = \sqrt{3,984 \cdot 10^{14} / 6,77 \cdot 10^6}$$

$$v = \sqrt{5,885 \cdot 10^7} = 7.671 \text{ m/s} = 7,67 \text{ km/s}$$

La ISS da una vuelta completa en unos 92 minutos.

Resultado: $v_{orb} = 7,67 \text{ km/s}$.

2. Calcula el periodo orbital de la Luna. $d_{T-L} = 3,84 \cdot 10^8$ m, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg. [Tipo PAU]

$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{r^3 / G \cdot M}$. El truco está en calcular r^3 con cuidado para no equivocarse de exponente.

Primero r^3 para no equivocarse:

$$r^3 = (3,84 \cdot 10^8)^3 = 56,62 \cdot 10^{24} = 5,662 \cdot 10^{25} \text{ m}^3$$

Luego $r^3 / (GM)$:

$$5,662 \cdot 10^{25} / 3,984 \cdot 10^{14} = 1,421 \cdot 10^{11} \text{ s}^2$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{1,421 \cdot 10^{11}} = 2 \cdot \pi \cdot 3,770 \cdot 10^5 = 2,369 \cdot 10^6 \text{ s} = 27,4 \text{ días}$$

Resultado: $T = 27,4$ días.

3. Un satélite de $m = 500$ kg orbita a $h = 2 \cdot R_T$. Calcula su velocidad orbital y periodo. [Tipo PAU]

$r = R + h = 3R$. La masa del satélite no aparece en ninguna de las dos fórmulas.

$$r = 3 \cdot 6,37 \cdot 10^6 = 1,911 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$v = \sqrt{3,984 \cdot 10^{14} / 1,911 \cdot 10^7} = \sqrt{2,085 \cdot 10^7} = 4.566 \text{ m/s}$$

Periodo (la circunferencia $2 \cdot \pi \cdot r$ dividida entre la velocidad):

$$T = 2 \cdot \pi \cdot 1,911 \cdot 10^7 / 4.566 = 2,630 \cdot 10^4 \text{ s} = 7,3 \text{ h}$$

Resultado: $v = 4,57 \text{ km/s}$; $T = 7,3 \text{ h}$.

4. Marte orbita a $r_M = 2,28 \cdot 10^{11} \text{ m}$ con $T_M = 687$ días. La Tierra tarda $T_T = 365$ días. Calcula la distancia Tierra-Sol. [Tipo PAU]

Aplicar la 3.ª ley de Kepler: T^2/r^3 es la misma constante para los dos planetas porque orbitan el mismo Sol.

De $T_T^2/r_T^3 = T_M^2/r_M^3$ despejamos r_T^3 :

$$r_T^3 = r_M^3 \cdot (T_T/T_M)^2 = (2,28 \cdot 10^{11})^3 \cdot (365/687)^2$$

$$r_T^3 = 1,185 \cdot 10^{34} \cdot 0,2823 = 3,345 \cdot 10^{33} \text{ m}^3$$

$$r_T = (3,345 \cdot 10^{33})^{1/3} = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Resultado: $r_T = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1$ unidad astronómica.

5. Calcula la velocidad de escape desde la superficie de la Tierra. [Tipo PAU]

La energía total vale cero. Aplicar directamente $v_{\text{esc}} = \sqrt{2G \cdot M/R}$.

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2 \cdot 3,984 \cdot 10^{14} / 6,37 \cdot 10^6}$$

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{1,251 \cdot 10^8} = 11.185 \text{ m/s} = 11,2 \text{ km/s}$$

Es $\sqrt{2} = 1,41$ veces la velocidad orbital rasante de $7,9 \text{ km/s}$.

Resultado: $v_{\text{esc}} = 11,2 \text{ km/s}$.

6. Un satélite de $m = 300 \text{ kg}$ orbita a $h = R_T$. Calcula su energía total. [Tipo PAU]

$r = 2R_T$. En órbita circular, $E_{\text{total}} = -G \cdot M \cdot m / (2r)$.

$$r = 2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 = 1,274 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$E_{\text{total}} = -(3,984 \cdot 10^{14} \cdot 300) / (2 \cdot 1,274 \cdot 10^7)$$

$$E_{\text{total}} = -1,195 \cdot 10^{17} / 2,548 \cdot 10^7 = -4,69 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Como $E_{\text{total}} = -E_c$, la energía cinética vale $+4,69 \cdot 10^9 \text{ J}$.

Resultado: $E_{\text{total}} = -4,69 \cdot 10^9 \text{ J}$.

7. La Tierra tarda 1 año orbitando a d del Sol. ¿Cuánto tarda un planeta a 4·d? [Tipo PAU]

Regla directa de la 3.ª ley: si r se multiplica por n, T se multiplica por $n^{3/2}$.

$n = 4$. Multiplicamos T por $4^{3/2}$:

$$4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

$$T_p = 1 \text{ año} \cdot 8 = 8 \text{ años}$$

Verificación: $T_p^2 = (1)^2 \cdot 4^3 = 64 \Rightarrow T_p = 8 \text{ años}$. Correcto.

Resultado: $T_p = 8 \text{ años}$.

8. Un satélite geoestacionario tiene $T = 24 \text{ h}$. Calcula su distancia al centro de la Tierra. [Tipo PAU]

Despejar r de la 3.ª ley: $r^3 = G \cdot M \cdot T^2 / (4 \cdot \pi^2)$. Primero hay que pasar T a segundos.

Convertimos: $T = 24 \cdot 3.600 = 86.400 \text{ s}$

Despejamos $r^3 = G \cdot M \cdot T^2 / (4 \cdot \pi^2)$:

$$r^3 = (3,984 \cdot 10^{14} \cdot (86.400)^2) / (4 \cdot \pi^2)$$

$$r^3 = (3,984 \cdot 10^{14} \cdot 7,465 \cdot 10^9) / 39,48 = 7,533 \cdot 10^{22} \text{ m}^3$$

$$r = (7,533 \cdot 10^{22})^{1/3} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Resultado: $r = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m} = 42.200 \text{ km}$ desde el centro de la Tierra.

9. Calcula la energía para trasladar $m = 500$ kg de $h_1 = R_T$ a $h_2 = 3 \cdot R_T$. [Tipo PAU]

$$\Delta E = E_{\text{total}}(r_2) - E_{\text{total}}(r_1), \text{ con } r_1 = 2R_T \text{ y } r_2 = 4R_T$$

$$E_1 = -(3,984 \cdot 10^{14} \cdot 500) / (2 \cdot 1,274 \cdot 10^7) = -7,82 \cdot 10^9 \text{ J}$$

$$E_2 = -(3,984 \cdot 10^{14} \cdot 500) / (2 \cdot 2,548 \cdot 10^7) = -3,91 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Energía aportada (positiva: hay que empujar el satélite hacia afuera):

$$\Delta E = -3,91 \cdot 10^9 + 7,82 \cdot 10^9 = 3,91 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Resultado: $\Delta E = 3,91 \cdot 10^9 \text{ J}$.

10. Desde $r = 2 \cdot R_T$, calcula v_{orb} y v_{esc} . Compara ambas. [Tipo PAU]

Calcular las dos velocidades en la misma r y hacer el cociente. Siempre sale $\sqrt{2} = 1,41$.

Con $r = 2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 = 1,274 \cdot 10^7$ m:

$$v_{\text{orb}} = \sqrt{3,984 \cdot 10^{14} / 1,274 \cdot 10^7} = \sqrt{3,127 \cdot 10^7} = 5.592 \text{ m/s} = 5,59 \text{ km/s}$$

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{2 \cdot 3,984 \cdot 10^{14} / 1,274 \cdot 10^7} = \sqrt{6,255 \cdot 10^7} = 7.909 \text{ m/s} = 7,91 \text{ km/s}$$

$$\text{Cociente: } v_{\text{esc}} / v_{\text{orb}} = 7.909 / 5.592 = 1,414 = \sqrt{2}$$

La relación $v_{\text{esc}} = \sqrt{2} \cdot v_{\text{orb}}$ es universal: se cumple en cualquier órbita circular.

Resultado: $v_{\text{orb}} = 5,59 \text{ km/s}$; $v_{\text{esc}} = 7,91 \text{ km/s}$ (siempre $v_{\text{esc}} = \sqrt{2} \cdot v_{\text{orb}}$).

11. La Tierra pasa por el perihelio a $r_p = 1,471 \cdot 10^{11}$ m del Sol con $v_p = 30,29 \text{ km/s}$, y por el afelio a $r_a = 1,521 \cdot 10^{11}$ m. $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. a) Calcula su velocidad en el afelio. b) Calcula el módulo de su momento angular respecto al Sol y su velocidad areolar. [Tipo PAU]

La fuerza del Sol es central, así que L se conserva. En perihelio y afelio r y v son perpendiculares: basta con $r_p \cdot v_p = r_a \cdot v_a$.

a) Igualamos el momento angular en los dos extremos (la masa se cancela):

$$v_a = v_p \cdot r_p / r_a = 30,29 \cdot 1,471 / 1,521 = 30,29 \cdot 0,9671 = 29,29 \text{ km/s}$$

b) En el perihelio $\alpha = 1$, así que $|L| = m \cdot r \cdot v$:

$$|L| = 5,97 \cdot 10^{24} \cdot 1,471 \cdot 10^{11} \cdot 3,029 \cdot 10^4 = 2,660 \cdot 10^{40} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

La velocidad areolar es $|L|/(2m)$, y la masa de la Tierra vuelve a cancelarse:

$$dA/dt = r_p \cdot v_p / 2 = 4,456 \cdot 10^{15} / 2 = 2,228 \cdot 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$$

Comprobación de a) por otro camino, con la energía mecánica ($M_{\text{Sol}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$):

$$v_a^2 = v_p^2 - 2 \cdot G \cdot M_{\text{Sol}} \cdot (1/r_p - 1/r_a) = 9,175 \cdot 10^8 - 5,936 \cdot 10^7 = 8,581 \cdot 10^8$$

$$v_a = \sqrt{8,581 \cdot 10^8} = 2,929 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 29,29 \text{ km/s. Coincide.}$$

La NASA da 29,29 km/s para la velocidad mínima de la Tierra: la cuenta sale igual que el dato medido.

Resultado: $v_a = 29,29 \text{ km/s}$; $|L| = 2,66 \cdot 10^{40} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$, perpendicular al plano de la órbita;
 $dA/dt = 2,23 \cdot 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$.

12. Un satélite de 1.000 kg describe una órbita circular a 400 km de altura. a) Calcula el momento angular respecto al centro de la Tierra (módulo y dirección). b) Explica por qué no cambia a lo largo de la órbita. c) ¿Cuánto valdría en una órbita circular de radio doble? [Tipo PAU]

En la órbita circular v es siempre perpendicular a r , así que $|L| = m \cdot r \cdot v$. La velocidad sale de igualar la gravedad a la fuerza centrípeta, como en el ejercicio 1.

$$r = R_T + h = 6,37 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 = 6,77 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$v = \sqrt{G \cdot M_T / r} = \sqrt{3,984 \cdot 10^{14} / 6,77 \cdot 10^6} = 7.671 \text{ m/s}$$

$$|L| = m \cdot r \cdot v = 1.000 \cdot 6,77 \cdot 10^6 \cdot 7.671 = 5,193 \cdot 10^{13} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Comprobación con la fórmula directa de la órbita circular:

$$|L| = m \cdot \sqrt{G \cdot M_T \cdot r} = 1.000 \cdot \sqrt{2,697 \cdot 10^{21}} = 5,193 \cdot 10^{13} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s. Coincide.}$$

Dirección: perpendicular al plano de la órbita, con el sentido que da la regla de la mano derecha al girar r hacia v .

b) La única fuerza es la gravedad, que apunta al centro de la Tierra, en la recta de r . Su momento $r \times F$ es cero, así que L es constante en módulo y en dirección.

c) Con $|L| = m \cdot \sqrt{G \cdot M_T \cdot r}$, si r se duplica L se multiplica por $\sqrt{2}$:

$$|L'| = \sqrt{2} \cdot 5,193 \cdot 10^{13} = 7,34 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Más lejos el satélite va más despacio, pero r crece más de lo que baja v : L aumenta.

Resultado: a) $|L| = 5,19 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$, perpendicular al plano de la órbita; b) la fuerza es central; c) $7,34 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

13. Una estrella del borde de una galaxia describe una órbita circular de radio $R = 4,6 \cdot 10^{20} \text{ m}$ (unos 49.000 años luz) alrededor del centro. La masa de las estrellas y el gas que se ven es $m = 1,0 \cdot 10^{41} \text{ kg}$, y se puede tratar como si estuviera en el centro. a) ¿A qué velocidad debería girar la estrella si esa fuera toda la masa? b) Se mide $v = 220 \text{ km/s}$. ¿Qué masa hay en realidad dentro de su órbita? c) ¿Qué fracción de esa masa es materia oscura? [Tipo PAU]

La estrella es un satélite de la galaxia: la gravedad hace de fuerza centrípeta y $v = \sqrt{G \cdot M/R}$. Si la velocidad medida es mayor que la esperada, dentro de la órbita hay más masa de la que se ve.

a) Con la masa visible, $G \cdot m/R$ da el cuadrado de la velocidad:

$$v^2 = 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 1,0 \cdot 10^{41} / 4,6 \cdot 10^{20} = 1,451 \cdot 10^{10} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v = \sqrt{1,451 \cdot 10^{10}} = 1,20 \cdot 10^5 \text{ m/s} = 120 \text{ km/s}$$

b) Se despeja la masa de $v^2 = G \cdot M/R$ con la velocidad medida, pasada a m/s:

$$M = v^2 \cdot R / G = (2,2 \cdot 10^5)^2 \cdot 4,6 \cdot 10^{20} / 6,674 \cdot 10^{-11}$$

$$M = 4,84 \cdot 10^{10} \cdot 4,6 \cdot 10^{20} / 6,674 \cdot 10^{-11} = 2,226 \cdot 10^{31} / 6,674 \cdot 10^{-11} = 3,34 \cdot 10^{41} \text{ kg}$$

Comprobación: M va con v^2 , y los dos cuadrados ya están calculados arriba:

$$M = m \cdot (v / v_{\text{esp}})^2 = 1,0 \cdot 10^{41} \cdot 4,84 / 1,451 = 3,34 \cdot 10^{41} \text{ kg. Coincide.}$$

c) La materia oscura es la masa que falta, dividida entre la masa total:

$$M - m = 3,34 \cdot 10^{41} - 1,0 \cdot 10^{41} = 2,34 \cdot 10^{41} \text{ kg}$$

$$\text{fracción} = 2,34 / 3,34 = 0,70, \text{ es decir, un } 70 \%$$

La estrella gira casi al doble de lo esperado, así que la masa es más del triple de la que se ve.

Resultado: a) 120 km/s; b) $M = 3,34 \cdot 10^{41} \text{ kg}$; c) un 70 % de la masa es materia oscura.

Fin del Bloque 1. El Bloque 2 aborda el Campo Electromagnético con la misma estructura.